

4^o
Math. P.

359

Math P 359

Matheſis.

Analysio infinitor. et finitor. in genere
.345.



<36621095840012

S

<36621095840012

Bayer. Staatsbibliothek

METHODUS
INCREMENTORUM
DIRECTA & INVERSA.

AUCTORE
BROOK TAYLOR, LL.D.
REGIÆ SOCIETATIS Secretario.



LONDINI

Impensis Gulielmi Innys ad Insignia Principis in Coemetrio D. Pauli.
MDCCXVII.

METHODUS
INCREMENTORUM
DIRECTA & INVERSA.

AUCTORE
BROOK TAYLOR, LL.D.
REGIE SOCIETATIS SECRETARIO

Bayensche
Staatsbibliothek
München



LONDINI

Printed by J. Streater, at the Sign of the Sun, in Strand, near the Theatre Royal, in the City of London.

ILLUSTRISSIMÆ

Societati Regali,

A

SERENISSIMO REGE

CAROLO II.

Ad PHILOSOPHIAM Promovendam

FUNDATÆ,

ET

AUSPICIIS

AUGUSTISSIMI REGIS

GEORGGII

FLORENTI,

TRACTATUM HUNC D.D.D.

BROOK TAYLOR.

ILLUSTRATION

Societati Regali

A

SERENISSIMO REGE

CAROLO II.

AD PHILOSOPHIAE PROMOVENDAM



FUNDATA

ET

AUSPICIS

AUGUSTISSIMI REGIS

GEORGII

FLORENTI

TRACTATUM HUNC D.D.

BROOK TAYLOR

LECTORI.

IN Methodo hâc Incrementorum quantitates considero ut Incrementis auctas vel Decrementis imminutas, & ex datis relationibus Integralium quæro relationes Incrementorum, atque vicissim ex datis relationibus Incrementorum quæro quantitates ipsas Integrales. Horum usus in rebus Mathematicis satis latè patet; sed in eo maximè elucet, quod hinc facile deriventur omnes proprietates Fluxionum. Clarissimus Dominus Newtonus quantitates Mathematicas considerando ut motu perpetuo descriptas, per Methodum Fluxionum ex rationibus primis Incrementorum nascentium quærit rationes velocitatum quibus magnitudines describuntur, & vicissim ex velocitatibus hisce (quas Fluxiones quantitatuum vocat) quærit magnitudines quantitatuum ipsarum descriptarum. Hoc idem, sed minus generaliter, fecere alii (ut Veteres in Methodo exhaustionum, Cavallerius & Wallisius in Methodis summatoriis.) Veteres investigando magnitudines figurarum inscripserunt & circumscripserunt figuras ex partibus finitis & cognitis constantes, & partium istarum numerum auxerunt & magnitudinem minuerunt, donec differentia inter earum summam & figuram quæsitam esset minor quâvis datâ. Cavallerius & Recentiores contemplantur partes istas ut in infinitum diminutas. Sed hi omnes, contemplando geneses quantitatuum per additiones partium, non satis consuluerunt severæ isti ἀκριβεία Geometrarum. Partes enim, ut Methodus sit accurata, deberent esse primæ nascentes; at nullæ sunt ejusmodi partes in rerum Naturâ, sunt tantum rationes primæ partium nascentium. Ergò Newtonus missis partium magnitudinibus, missis & earum summis, rationes ultimas partium evanescentium, & primas nascentium introduxit, & in his rationibus Analysin suam fundavit. Sumptis itaque rationibus

tionibus primis Incrementorum nascentium, vel ultimis evanescentium, accommodantur omnes Conclusiones Methodi Incrementorum ad Methodum Fluxionum, Incrementis jam evanescentibus, & Integralibus in fluentes conversis. Et hoc pacto vitatur omnis consideratio quantitatum infinitè (seu, ut aliqui loqui ament, indefinitè) parvarum. Nam in Methodo Fluxionum, ut Conclusiones sint veræ & omnino accuratæ, partes seu incrementa concipienda sunt, non ut perexigua, seu infinitè parva, sed ut reverà nulla: Rationes enim primæ non sunt, nisi in ipso momento ubi quantitates nasci incipiunt; ubi semel nascuntur jam desinunt esse primæ. Similiter & rationes ultimæ non sunt, nisi ubi quantitates jam evanescent & fiunt nullæ. Facilioris tamen conceptûs gratiâ possunt pro Fluxionibus sumi augmenta illa nascentia, quæ Newtonus momenta vocat, atque designat literâ o Fluxionibus appositâ. Et in hoc modo concipiendi facilius cernitur relatio inter Methodum hanc Incrementorum & Methodum Fluxionum. Quapropter etiam in Propositionibus nonnullis generalibus spectantibus ad Incrementa quævis in genere, vel finitæ magnitudinis, vel infinitè parva, exempla damus in Fluxionibus, vice tamen Fluxionum sumendo momenta.

Methodus

Methodus Incrementorum.

P A R S P R I M A.

Ubi traduntur Præcepta, cùm Methodi Incrementorum in genere, tùm Methodi Fluxionum.

INTRODUCTIO.



Quantitates indeterminatas in his confidero ut Incrementis perpetuò auctas, vel Decrementis diminutas. Indeterminatas ipsas Integrales designo literis z , x , v , &c. earumque Incrementa, seu partes mox addendas designo iisdem literis a parte inferiori punctatis z , x , v , &c. Quorum Incrementorum Incrementa, seu Integralium ipsarum Incrementa secunda designo iisdem literis bis punctatis z , x , v , &c. Incrementa tertia designo literis ter punctatis z , x , v , &c. & sic porrò. Quinetiam maioris generalitatis gratiâ, vice punctorum nonnunquam scribo characteres punctorum numeros designantes: Sic si n fit 3, per x , vel x designatur x ; si n fit 0, per x , vel x designatur ipsa Integralis x ; si n fit -1 , per x , seu x designatur quantitas cujus Incrementum primum est x ; & sic de cæteris. Sæpè etiam in hoc Tractatu quantitatis ejusdem variabilis valores aliquot successivos designo per eandem literam lineolis infig-

infignitam; nempe præsentem valorem designando per literam simplicem, præcedentes per accentus graves superscriptos, & subsequentes per lineolas subscriptas. Sic exempli gratiâ sunt x , $\grave{x}$, $\text{}x$, $\text{}x$, $\text{}x$, ejusdem quantitatis valores quinque successivi, quorum est x valor præsens, sunt $\text{}x$ & $\text{}x$ valores præcedentes, atque x & $\text{}x$ valores subsequentes.

II. Fluxiones, quæ sunt in ratione primâ Incrementorum nascentium, vel ultimâ evanescentium, designantur punctis indicibus Incrementorum ad literarum partes superiores transpositis: Sic est $\text{}x$ Fluxio prima ipsius x ; $\text{}x$ est ejusdem Fluxio secunda; $\text{}x$ Fluxio tertia; & sic porro. Fluents etiam nonnunquam designantur per lineolas (similes accentûs acuti) literis superscriptas: Sic $\acute{x}$ designat fluentem ipsius x , seu quantitatem cujus Fluxio prima est x ; $\text{}\acute{x}$ designat fluentem secundam ipsius x , seu quantitatem cujus Fluxio secunda est x ; & sic porro. Et hæ lineolæ in indicibus fluentium vim habent punctorum (ut ita dicam) negativorum in indicibus Fluxionum: Sic si sit $n=2$, & $\text{}x$ designet $\text{}x$, mutato signo designabitur $\text{}\text{}x$ per $\text{}x$. Porro fluents quantitatum compositarum designantur nonnunquam per quantitates ipsas parallelogrammis inclusas; sic designat $\boxed{xz^2}$ fluentem ipsius xz^2 .

P R O P. I. P R O B. I.

*Data Æquatione quantitates variables involvente
invenire Incrementa.*

IN Æquatione propositâ vice quantitatis cujusvis variabilis scribe eandem quantitatem proprio Incremento auctam, & resultabit Æquatio nova; unde ablata Æquatione priori, residuum erit Æquatio, per quam dabitur relatio Incrementorum.

Exempli gratiâ fit Æquatio $x^3 - xv^2 + a^2z - b^3 = 0$, ubi a & b sunt quantitates determinatæ & immutabiles. Itaque pro x , v , & z scriptis $x + x$, $v + v$, & $z + z$, prodit Æquatio nova $x^3 + 3xx^2 + 3x^2x + x^3 - xv^2 - xv^2 - 2xvv - xv^2 - 2xvv - xv^2 + a^2z + a^2z - b^3 = 0$; unde subductâ Æquatione priori, residuum $3xx^2 + 3x^2x + x^3 - xv^2 - 2xvv - xv^2 - 2xvv - xv^2 + a^2z = 0$ fit Æquatio, cujus ope dantur relationes Incrementorum.

In hac Solutione, si pro Incrementis nascentibus scribatur nihil, & pro earum rationibus primis substituantur rationes Fluxionum, eo pacto dabuntur relationes Fluxionum. Et potest operatio simul & semel perfici, ab initio neglectis terminis, cum Æquationis propositæ, tum & ob Incrementa nascentia evanescentibus, omnino ut docetur in Regulâ *Newtonianâ*, quæ hæc est;

- “ Multiplicetur omnis Æquationis terminus per indicem
- “ dignitatis quantitatis cujusque fluentis quam involvit, &
- “ in singulis multiplicationibus mutetur dignitatis latus
- “ in Fluxionem suam; & aggregatum factorum sub pro-
- “ priis signis erit Æquatio nova, per quam definietur
- “ relatio Fluxionum.

E X P L I C A T I O.

- “ Sunt a , b , c , d , &c. quantitates determinatæ & im-
 - “ mutabiles, & proponatur Æquatio quævis quantitates fluen-
- B
- “ tes

“ tes z, y, x , &c. involvens, uti $x^3 - xy^2 + a^2z - b^3 = 0$. Multi-
 “ plicentur termini primò per indices dignitatùm x , & in singulis
 “ multiplicationibus pro dignitatis latere, seu x unius dimensionis,
 “ scribatur x , & summa factorum erit $3xx^2 - xy^2$. Idem fiat in y ,
 “ & prodibit $-2xyy$. Idem fiat in z , & prodibit a^2z . Ponatur
 “ summa factorum æqualis nihilo, & habebitur Æquatio $3xx^2 - xy^2$
 “ $- 2xyy + a^2z = 0$.

“ Ad eundem modum si Æquatio esset $x^3 - xy^2 + a^2\sqrt{ax - y^2}$
 “ $- b^3 = 0$ produceretur $3xx^2 - xy^2 - 2xyy + a^2\sqrt{ax - y^2} = 0$.
 “ Ubi si Fluxionem $\sqrt{ax - y^2}$ tollere velis, pone $\sqrt{ax - y^2} = z$, &
 “ erit $ax - y^2 = z^2$, & (per hanc Prop.) $ax - 2yy = 2zz$, seu
 “ $\frac{ax - 2yy}{2z} = z$, hoc est $\frac{ax - 2yy}{2\sqrt{ax - y^2}} = \sqrt{ax - y^2}$. Et inde $3xx^2 - xy^2$
 “ $- 2xyy + \frac{a^3x - 2a^2yy}{2\sqrt{ax - y^2}} = 0$.

Per operationem repetitam pergitur ad Incrementa, ut & ad
 Fluxiones secundas, tertias, & sequentes. Sit Æquatio $xz - av = 0$.
 Tum per operationem primam erit $xz + xz + xz - av = 0$. In
 hac Æquatione pro x, x, z, z, v, v scriptis $x + x, x + x, z + z,$
 $z + z, v + v, v + v$, & subductâ Æquatione, per operationem
 secundam fiet $2xz + xz + 2xz + xz + 2xz + xz - av = 0$. Sic
 in Fluxionibus propositâ eâdem Æquatione, fiet per operationem
 primam $xz + xz - av = 0$, per secundam $2xz + xz + xz - av$
 $= 0$. Et sic pergere licet ad Incrementa, & ad Fluxiones tertias,
 quartas, & sequentes.

Sed ubi hoc modo pergitur ad Incrementa, vel ad Fluxiones
 secundas, tertias, & sequentes, convenit quantitatem aliquam confi-
 derare ut uniformiter crescentem, & pro ejus Incrementis, vel Fluxio-
 nibus, secundâ, tertiâ, & sequentibus scribere nihil. Sic in Æqua-
 tione modò propositâ $xz - av = 0$, uniformiter crescente z , erit
 per

per operationem secundam $2\ddot{x}z + \ddot{x}z + 2\ddot{x}z - a\ddot{v} = 0$. Et in Fluxionibus propositâ eâdem Æquatione, erit per operationem secundam $2\ddot{x}z + \ddot{x}z - a\ddot{v} = 0$, per tertiam $3\ddot{x}z + \ddot{x}z - a\ddot{v} = 0$. Et in hoc casu potest commodè pro Fluxione datâ z scribi 1. Hoc pacto Æquationes prædictæ fiunt $\ddot{x}z + x - a\ddot{v} = 0$, $2\ddot{x} + \ddot{x}z - a\ddot{v} = 0$, $3\ddot{x} + \ddot{x}z - a\ddot{v} = 0$.

P R O P. II. P R O B. II.

In Æquatione incrementalî variabiles quotvis involvente, vice omnium istarum variabilium substituere totidem novas per eadem Incrementa in ordine inverso crescentes.

SIT x quævis variabilium in Æquatione propositâ, & v nova variabilis in ejus locum substituenda; ita ut dum augetur x , minuat v per eadem Incrementa. Tum si sit n index infimi Incrementi in Æquatione propositâ, satisfiet Problemati pro x , $\dot{x}$, $\ddot{x}$, &c. scribendo sequentes ipsorum valores; ubi est d quantitas determinata ad libitum sumpta,

$$x = d - v - \frac{n\dot{v}}{2} - \frac{n(n-1)\ddot{v}}{2 \cdot 3} - \&c.$$

$$\dot{x} = \dot{v} + \frac{n-1\ddot{v}}{2} + \frac{n-1 \cdot n-2\ddot{v}}{2 \cdot 3} + \&c.$$

$$\ddot{x} = -\ddot{v} - \frac{n-2\ddot{v}}{2} - \frac{n-2 \cdot n-3\ddot{v}}{2 \cdot 3} - \&c.$$

$$\ddot{\ddot{x}} = \ddot{\ddot{v}} + \frac{n-3\ddot{\ddot{v}}}{2} + \&c.$$

& sic porro.

D E M O N S T R A T I O

DEMONSTRATIO.

	A.	B.
1.	$x \quad - \quad - \quad - \quad - \quad -$	$v + 3v + 3v + v$
2.	$x + x \quad - \quad - \quad - \quad -$	$v + 2v + v$
3.	$x + 2x + x \quad - \quad -$	$v + v$
4.	$x + 3x + 3x + x$	v

Sit verbi gratiâ $n = 3$, & in tabulis A & B exhibeantur quatuor valores correspondentes ipsorum x & v in contrario ordine crescentium; qui per additionem Incrementorum facilè colliguntur. Tum quoniam ex Hypothesi Incrementa correspondentia in utrâque tabulâ sunt semper æqualia, dabitur summa duorum quorumvis valorum correspondentium x & v in his tabulis. Quare si summa ista data sit d , erit

$$x \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - = d - v - 3v - 3v - v$$

$$x + x \quad - \quad - \quad - \quad - = d - v - 2v - v$$

$$x + 2x + x \quad - \quad - = d - v - v$$

$$x + 3x + 3x + x = d - v$$

Tum sumendo Differentias harum Æquationum fit

$$x \quad - \quad - \quad - \quad - = v + 2v + v$$

$$x + x \quad - \quad - \quad - = v + v$$

$$x + 2x + x = v$$

Et sumendo Differentias harum Æquationum fit

$$x \quad - \quad - = -v - v$$

$$x + x = -v$$

Denique

Denique sumendo Differentias harum Æquationum fit $x = v$.
Sed hi valores ipsorum $x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\dot{x}}$, iidem sunt, ac in solutione jubentur; & eadem est argumentatio ubi est n alterius cujusvis valoris. Quare pro singulis x , & suis Incrementis substituendo hujusmodi valores, rectè solvitur Problema. Q. E. D.

C O R O L.

Ob Incrementa evanescentia in Fluxionibus Solutio fit simplicior, existente $x = d - v$, $\dot{x} = \dot{v}$, $\ddot{x} = -\ddot{v}$, $\ddot{\dot{x}} = \ddot{\dot{v}}$, $\ddot{\ddot{x}} = -\ddot{\ddot{v}}$, & sic porro.

S C H O L I U M.

Possunt equidem Æquationes incrementales pro lubitu transformari ope Æquationum assumptarum. Sic si feceris $x = vv$, capiendò Incrementa (per Prop. 1.) erit $\dot{x} = 2vv + v\dot{v}$, $\ddot{x} = 2\dot{v}\dot{v} + 4v\ddot{v} + v\ddot{\dot{v}}$, & sic porro; unde transformabitur Æquatio pro $x, \dot{x}, \ddot{x}$, &c. substituendo hos ipsorum valores. Idem fiet si sit $x = d - v$. Sed in hoc casu quoniam est $\dot{x} = -\dot{v}$, erit v quantitas negativa; quare quantitas substituta v non erit quantitas reverà increscens in Æquatione transformatâ, sed decrescens, existente v ipsius Decremento proximè auferendo. Proinde si cupis Æquationem ita transformare, ut quantitates v decrescant crescentibus x , & tamen in Æquatione transformatâ sint v ipsarum v vera Incrementa, ut sunt x vera Incrementa ipsius x , procedendum erit per hanc Propositionem.

PROP. III. PROB. III.

Æquationem fluxionalem, in quâ sunt fluentes tantum duæ z & x , quarum z fluit uniformiter, ita transformare ut fluat x uniformiter.

Solvitur Problema pro $\ddot{x}$, $\dot{x}$, x , &c. substituendo sequentes ipso-
rum valores, nempe $\ddot{x} = -\frac{\ddot{z}x}{\dot{z}}$, $\dot{x} = -\frac{\ddot{z}zx + 3\dot{z}^2x}{\dot{z}^2}$,
 $x = -\frac{\ddot{z}z^2x + 10\dot{z}zzx - 15\dot{z}^3x}{\dot{z}^3}$, &c.

DEMONSTRATIO.

Sunto A, B, C, D, E , &c. quantitates ex x & datis compositaë,
& sint $\dot{A} = B\dot{x}$, $\dot{B} = C\dot{x}$, $\dot{C} = D\dot{x}$, $\dot{D} = E\dot{x}$, & sic porro. Tum
si ponatur $z = A$, erit $\dot{z} = \dot{A}$, & (fluente uniformiter z ,)
 $0 = (B\ddot{x} + \dot{B}\dot{x} =) B\ddot{x} + C\dot{x}^2$, $0 = (B\ddot{x} + \dot{B}\dot{x} + 2C\ddot{x}x$
 $+ \dot{C}x^2 =) B\ddot{x} + 3C\ddot{x}x + D\dot{x}^3$, $0 = B\ddot{x} + 4C\ddot{x}x + 3C\ddot{x}^2$
 $+ 6D\dot{x}^2x + E\dot{x}^4$, & sic porro (per Prop. I.) Sed ubi fluit unifor-
miter x , & fluit inequaliter z , sunt $B = \frac{\dot{z}}{\dot{x}}$, $C = \frac{\ddot{z}}{\dot{x}^2}$, $D = \frac{\ddot{z}}{\dot{x}^3}$,
 $E = \frac{\ddot{z}}{\dot{x}^4}$, &c. Itaque pro B, C, D, E , &c. scriptis his ipso-
rum valores, invenientur ipso- $\ddot{x}$, $\dot{x}$, x , &c. valores, ut supra exhi-
bentur. Quibus proinde in Æquatione substitutis, deinde fluet x
uniformiter, atque z inequaliter. Q. E. D.

SCHOLIUM.

Et eodem modo transformari potest Æquatio, quæ plures fluentes involvit v , y , &c. præter z & x ; modò nullius v , y , &c. Fluxio ultra primam in Æquatione involvatur. Quare si in Æquatione, quam per hanc Propositionem transformare velis, sint quædam ipsorum v , y , &c. Fluxiones secundæ, tertiæ, & sequentes, primùm eliminandæ sunt Fluxiones istæ ope Æquationum datarum, & deinde procedet transformatio per hanc Propositionem facta.

PROP. IV. THEOR. I.

*Datâ Æquatione præter variabilem z , cujus valores omnes dantur, involvente alterius variabilis x Incrementa aliquot x , x ,
 x , &c. quarum prima sit x , & ultima x , (ubi etiam*

deesse possunt z , & omnia Incrementa x , x , &c. inter

x & x mediæ;) atque datis præterea $m + n$ conditionibus

spectantibus ad $m + n$ datos valores z , & ad totidem valores correspondentes quovis modo sumptos inter valores ipsorum x , x , x , &c. in infinitum; ita tamen ut non plures quam n

valores sumantur ipsius x , vel x , vel cujusvis Incrementi

inferioris, vel inter plura Incrementa x , x , x , & in-

feriora; nec plures quam $n + 1$ valores sumantur ipsius x ;

nec plures quam $n + 2$ valores sumantur ipsius x ; atque

sic deinceps; dabuntur omnes valores ipsius x ex datis omnibus valoribus z .

DEMONSTRATIO.

Per Æquationem datam datur x expressa per z & per Incrementa x , x , x , &c. ipso x superiora. Unde (per
 m $m+1$ $m+2$ $m+n$
 Prop. 1.) dabitur proximum Incrementum x per easdem
 $m+n+1$
 quantitates expressum; deinde (per eandem Propositionem)
 dabitur proximum Incrementum x per easdem quan-
 $m+n+2$
 titates expressum; & operationibus in infinitum continuatis
 dabuntur omnia Incrementa ipso x inferiora expressa per eas-
 $m+n$
 dem quantitates z , & per Incrementa x , x , x , &c. ipso x
 m $m+1$ $m+2$ $m+n$
 superiora. Si itaque sint a , & c , c , c , &c. ipsorum z , & x , x ,
 x , &c. certi quidam valores correspondentes, dabuntur omnia
 c , c , c , &c. in infinitum expressa per a , &
 $m+n$ $m+n+1$ $m+n+2$
 c , c , c , &c. ipso c superiora. Unde per additionem
 m $m+1$ $m+2$ $m+n$
 continuam dabuntur omnes valores ipsius x in tabulâ antè conti-
 m
 nuatâ. Et pro z & x substitutis novis variabilibus (per Prop. 2.)
 eodem modo dabuntur omnes valores x in tabulâ retrò continuatâ.
 m
 Deinde per additionem & subductionem continuam dabuntur omnes
 valores Incrementi proximè superioris x , expressi per easdem
 $m-1$
 quantitates, & per c : Et deinde eodem modo dabuntur om-
 $m-1$
 nes valores Incrementi adhuc superioris x expressi per easdem
 $m-2$
 quantitates & per c . Et sic pergendo dabuntur tandem omnes
 $m-2$
 valores

valores ipsius x expressi per a & per terminos $c, c, c, \&c.$ ipso c
 $m+n$
superiores. Sed terminorum $c, c, c, \&c.$ ante c numerus est
 $m+n$
 $m+n$. Quare per conditiones numero $m+n$ determinabuntur
omnes $c, c, c, \&c.$ adeoque dabuntur omnes x . Q. E. D. Sed
quoniam valores ipforum $x, x, x, \&c.$ includunt terminos
 $m, m+1, m+2$
tantum $c, c, c, \&c.$ quorum numerus est tantum n ;
 $m, m+1, m+2$
ergo nequeunt plures quam n conditiones applicari ad valores Incre-
menti x & inferiorum. Item quoniam valores ipsius x inclu-
 m $m-1$
dunt terminos tantum $c, c, c, \&c.$ quorum numerus est
 $m-1, m, m+1$
tantum $n+1$, nequeunt plures conditiones quam $n+1$ applicari
ad valores Incrementi x : Et similis est argumentatio in
 $m-1$
cæteris. Unde per hoc Theorema rectè determinantur data, & eorum
conditiones, in Æquationibus duas tantum Integrales & earum
Incrementa involventibus.

D

PROP.

PROP. V. THEOR. II.

Datis duabus *Æquationibus*, præter z , cujus valores omnes dantur, involventibus ipsorum v & x Incrementa aliquot, quorum suprema in utrâque *Æquatione* sint v & x , & infima in unâ

Æquatione sint v , & x , & infima in alterâ *Æqua-*
 $p+a$ $\pi+a$

tione sint v , & x ; si sit m numerorum $a + \beta$
 $p+b$ $\pi+\beta$

& $a + b$ maximus, dabuntur omnes v per conditiones numero $m + p$ spectantes ad $m + p$ valores ipsius z , & ad totidem valores respondentes ipsorum v , v , v , &c. & x ,

x , x , &c. atque dabuntur omnes x per conditiones
 $\pi+1$ $\pi+2$

numero $m + \pi$ spectantes ad $m + \pi$ valores ipsius z , & ad totidem valores respondentes ipsorum x , x , x , &c. &

v , v , v , &c. Ita quidem ut conditionum numerus
 p $p+1$ $p+2$

non amplius m applicari possit ad valores Incrementorum v
 p

& x , & inferiorum, reliquis conditionibus applicandis ad va-
 π

lores ipsorum x , x , x , &c. v , v , v , &c. ipsis x & v
 π p

superiorum juxta leges valorum Incrementorum ipsâ x supe-
 m

riorum in Propositione quartâ, hoc est, ut ad minimum unus
 valor sit ipsius x , duo valores sint ipsorum x & x , tres va-

lores sint ipsorum x , x , x ; & sic de v , v , v , &c. atque
 deinceps.

DEMONSTRATIO.

Nam per $\mathcal{A}$ equationes datas, & per $\mathcal{A}$ equationes novas inde derivatas (per Prop. 1.) eliminato v cum suis Incrementis, dabitur $\mathcal{A}$ equatio præter z involvens tantum Incrementa ipsius x , quorum supremum est x , & infimum est x . Et proximè antè inventam

$\mathcal{A}$ equationem istam dabitur $\mathcal{A}$ equatio præter z & ipsius x Incrementa x & inferiora, involvens tantum v . Unde dabitur v expressum

per z , & per ipsius x Incrementa x & inferiora. Sed si sint a , &

c , c , c , &c. ipsorum z , & x , x , x , &c. valores quidam correspondentes, dabuntur omnia Incrementa x & inferiora expressa per a , & per ipsorum c , c , c , &c. numerum m (per Prop. 4.)

Quare etiam dabuntur omnia v per easdem quantitates expressæ

Unde si sint d , d , d , &c. ipsorum v , v , v , &c. valores ipsius x valori a respondentes, & continuetur series d , d , d , &c. usque

d inclusivè, ut sit terminorum numerus p , dabuntur omnes v

expressæ per quantitates d , d , d , &c. & c , c , c , &c.

quorum omnium numerus est $m + p$. Exprimentur autem omnes valores ipsius x per quantitates c , c , c , &c. quarum numerus est

$m + \pi$. Quare determinatis omnibus c , c , c , &c. per conditiones

numero $m + \pi$ spectantes ad valores x & suorum Incrementorum; deinde determinabuntur omnes d , d , d , &c. per alias conditiones

numero p spectantes ad valores ipsorum v , v , v , &c. vel determinatis

minatis omnibus $d, d, d, \&c.$ & aliquot ex terminis $c, c, c, \&c.$ per conditiones spectantes ad valores $v, v, v, \&c.$ reliqui terminorum $c, c, c, \&c.$ determinabuntur per conditiones spectantes ad valores $x, x, x, \&c.$ Unde per conditiones $m + p$ dabuntur omnes v , & per conditiones $m + \pi$ dabuntur omnes x , (Q. E. D.) & per conditiones omnino $m + p + \pi$ dabuntur omnes cum v , tum x . Quomodo autem conditiones applicandæ sint ad valores v & x , & suorum Incrementorum ipsis v & x superiorum, satis constat ex Propositione quartâ.

SCHOLIUM.

Ad eundem modum per eliminationes variabilium etiam pergere licet ad inventionem conditionum, quibus astringi possunt tres, vel quatuor, vel plures Æquationes incrementales involventes tres, vel quatuor, vel plures variabiles præter z , cujus valores omnes dantur.

Sit Æquatio $z^2x - zx + b^3 = 0$. In hac Æquatione ad mentem Propositionis quartæ est x idem ac x , atque x idem ac x ; unde sunt $m = 2$, & $n = 2$. Quare per conditiones quatuor dabuntur omnes x , ex datis omnibus z . Et quoniam est x primum omnium $x, x, x, \&c.$ quæ in Æquatione occurrunt, ad minimum duæ conditiones applicandæ sunt ad valores ipsorum x & x ; ita, ut vel una conditio applicetur ad valorem x , & alia ad valorem x , vel utraque applicetur ad valorem x . Reliquæ autem conditiones possunt pro lubitu applicari ad valores omnium $x, x, x, \&c.$ in infinitum; ita, ut vel una conditio applicetur ad unum ex istis terminis, & alia ad alium; vel etiam ut omnes conditiones applicentur ad diversos valores ejusdem termini.

Sint

Sint duæ Æquationes $x - v + vz = 0$, & $xz - v = 0$. In his Æquationibus ad mentem hujus Propositionis est $p = 1$, $\pi = 2$, $a = 2$, $\alpha = 0$, $b = 1$, $\beta = 1$. Unde fit $a + \beta = 3$ & $\alpha + b = 1$, adeoque $m = 3$ ($= a + \beta$), atque $m + p = 4$, $m + \pi = 5$, & $m + p + \pi = 6$. Proinde per quatuor conditiones dabuntur omnes valores v , per quinque dabuntur omnes x , & per sex conditiones dabuntur omnes cum x , tum v . Quarum conditionum ad minimum una referenda est ad valorem v , duæ ad valores x & x , reliquis tribus utcunque applicandis ad valores Incrementorum v , x , & inferiorum.

Sint Æquationes fluxionales duæ $\dot{v}^2 - \dot{x}^2 - \dot{z}^2 = 0$, & $\ddot{z}\dot{v} - \ddot{x}\dot{x}^2 - \dot{x}\dot{x}^4 = 0$. Tum ad mentem hujus Propositionis erunt

$$\underset{p}{v} = \underset{\pi}{\dot{v}}, \quad \underset{\pi}{x} = \underset{\pi+a}{\dot{x}}, \quad \underset{\pi+a}{v} = \underset{\pi+a}{\dot{v}}, \quad \underset{\pi+a}{x} = \underset{\pi+a}{\dot{x}}, \quad \underset{p+b}{v} = \underset{p+b}{\ddot{v}}, \quad \text{&} \quad \underset{\pi+\beta}{x} = \underset{\pi+\beta}{\ddot{x}};$$

adeoque $p = 1$, $\pi = 0$, $a = 0$, $\alpha = 1$, $b = 2$, $\beta = 4$, $a + \beta = 4$, $\alpha + b = 3$; unde fit $m = 4$, $m + p = 5$, $m + \pi = 4$, atque $m + p + \pi = 5$. Dabuntur ergò omnes v & x ex datis omnibus z per conditiones omninò quinque; quarum ad minimum una pertinet ad valorem ipsius v , reliquæ possunt utcunque applicari ad valores ipsorum v , x , & Fluxionum suarum. Proinde si curvæ duæ sint describendæ, quarum ordinatæ sint v & x , & abscissa communis z , descriptâ curvâ cujus ordinata est v per quinque puncta data; vel per quatuor puncta & secante quintam ordinatam in angulo dato; vel in genere quæ transeat per unum punctum datum, & quatuor ordinatas positione datas secet vel in punctis, vel in angulis datis, vel in earum extremitatibus habeat curvaturam datam, vel symptomata quædam curvaturæ pendentia a valoribus

Fluxionum $\ddot{v}$, $\ddot{v}$, & inferiorum; dabuntur omnia puncta utriusque curvæ. Vel etiam si describatur altera curva, cujus ordinata est x ; ita, ut quatuor ordinatas vel secet in punctis datis, vel alias

fecet in punctis, alias in angulis datis; vel in earum extremitatibus curvaturas datas habeat, vel habeat alia quævis symptomata curvaturæ pendentia a Fluxionibus tertiis, quartis, & inferioribus; dabuntur omnia puncta utriusque curvæ ex dato præterea uno valore v . Et modò detur una conditio respiciens valorem v , conditiones reliquæ poterunt pro lubitu distribui inter valores ordinarum x & v , & Fluxionum suarum.

Porro in his casibus possunt duo vel plures dati valores z inter se æquari, vel (quod idem est in Geometriâ) possunt duæ vel plures ex ordinatis positione datis coincidere. Sed hoc pender a certis conditionibus petendis ex naturâ Æquationum quarumvis propositarum.

Sic propositis duabus Æquationibus $xv = z$ & $\dot{x}z + \ddot{x} - \ddot{v}v = 0$, per hanc propositionem erunt conditiones quatuor, quæ possunt pro lubitu applicari ad valores x & v , & Fluxionum suarum. Sed ob Æquationem primam $xv = z$ non possunt coincidere ordinatæ, quibus applicantur conditiones spectantes ad valores utriusque v & x ; nec ob Æquationem secundam possunt coincidere omnes quatuor ordinatæ, quibus applicantur conditiones spectantes ad valores omnium $x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{v}$; nam datis simul utrisque x & v determinatur z per Æquationem primam; & datis simul omnibus $x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{v}$, item determinatur z per Æquationem secundam; utrumque contra Hypothesin. Eodem modo capiendo Fluxionem Æquationis primæ (pro z scripto 1 ut prius) invenies $\dot{x}v + x\dot{v} = 1$; unde etiam constat non posse coincidere omnes ordinatas, quibus applicantur conditiones spectantes ad valores omnium $x, \dot{x}, v, \dot{v}$. Et iterum capiendo Fluxiones Æquationum propositarum forsan dabuntur alii limites hujusmodi conditionum.

Adhæc, ut in Æquationibus integrales tantum involventibus, sic in Æquationibus incrementalibus, quantitates variabiles sunt certis limitibus obnoxia. Sit exemplum in Æquatione fluxionali $x^2 - ax + z = 0$.

$+z=0$. Hinc est $x = \sqrt{ax - z}$; unde erit x (adeoque & omnes ipsius Fluxiones) impossibilis ubi est $ax < z$. Eiusdem Æquationis Fluxio secunda est $2x^2 + 2xx - ax^4 = 0$; unde fit $x = \sqrt{\frac{1}{2}ax - xx}$; erit ergò semper $xx > \frac{1}{2}ax$. Et eodem modo per ultiores Fluxiones Æquationis propositæ forsan invenies alios limites variabilium.

LEMMA I.

In Æquatione plura ejusdem quantitatis variabilis Incrementa involvente, per nullam regulam generalem certò definiri potest ad quot dimensiones ascendat quantitas illa in Æquatione integrali definiente ejus relationem ad alias quantitates variabiles.

In Æquatione fluxionali $xx + xx + nxx + xz = 0$, quantitates sunt semel tantum affectæ, & ubi est $n = 2$, datur x ex dato z per Æquationem quadraticam; sed tamen si fiat $n = 3$, non dabitur x , nisi per Æquationem cubicam; si $n = 4$, non dabitur x , nisi per Æquationem biquadraticam; si $n = \frac{1}{3}$, non dabitur x , nisi per Æquationem quinque dimensionum: Denique si terminorum reli-

quorum coefficientes fiant generales, ut sit $xx + mx^2 + nxx + pxz = 0$, dubito an dimensiones Æquationis quæsitæ per ullam certam legem definiri possint, si quidem omninò dari potest x ex dato z per Æquationem terminorum numero finitam. Sit alia Æquatio

$4x^3z^2 - 4x^2z^2 = 1 + z^2 | x^2$. In hac Æquatione ascendit x ad tertiam dignitatem, & ascendit x ad secundam; attamen datur x ex datâ z per Æquationem duarum dimensionum, cujus radix est

$$x = \frac{1 + z^2}{a + \sqrt{1 - a^2 z}}.$$

Mutatis verò coefficientibus haud certò scio an dari possit x ex dato z per Æquationem finitam.

P R O P.

PROP. VI. PROB. IV.

*Datis tot Æquationibus, quantitates integrales & Incrementa ut-
cunque promiscuè involventibus, quot sunt variables x , v , y ,
&c. ad z referenda, cujus valores omnes dantur; invenire
relationes Integralium per Æquationes ab Incrementis liberas,
quæ per coefficientes invariabiles indeterminatas adaptari possint
ad conditiones Problematis per has Æquationes solvendi.*

SOLUTIO.

Tenta num Æquatio aliqua proposita, vel ejus multiplex, vel sub-
multiplex aliqua sit cognitum aliquod Incrementum quantitatis ali-
cujus cognitæ. Hoc si fit, vice istius Æquationis propositæ substitue
quantitatem illam cognitam factam æqualem quantitati cujus Incre-
mentum primum, vel secundum, vel aliud quoddam est nihil; prout
Æquatio proposita, vel ejus multiplex, vel submultiplex sit Incre-
mentum primum, vel secundum, vel aliud quoddam quantitatis istius
cognitæ. Hoc idem facto in omnibus Æquationibus propositis, si
Æquationes inventæ integrales tantum involvunt, dabitur Solutio in
terminis numero finitis; quæ per coefficientes indeterminatos in
quantitatibus assumptis accommodabitur ad conditiones Problematis.
Q. E. F.

Sed si hoc pacto Problema solvi nequit, per eliminationes varia-
bilium (ope Æquationum datarum, & novarum Æquationum inde
derivatarum per Prop. I. si opus est) quære tot novas Æquationes
quot sunt variables x , v , y , &c. præter z , quarum una involvat
tantum x cum suis Incrementis (nempe præter z ,) reliquæ involvant
duas tantum variables x & v , x & y , &c. (quarum una sit semper
 x) cum suis Incrementis (in omnibus Æquationibus semper subin-
tellecto z .) Per Æquationem involventem tantum x cum suis Incre-
mentis quære valorem ipsius x , expressum per dignitates ipsius z ,
ope Propositionis alicujus sequentis. Deinde ope hujus Æquationis
elimi-

eliminenter x cum suis Incrementis ab Æquationibus involventibus tantum x & v , x & y , &c. cum suis incrementis; & per æquationes hoc modo resultantes quærantur valores ipsorum v , y , &c. expressi per dignitates ipsius z , eodem modo quo quærebatur valor ipsius x . Atque hoc pacto dabuntur omnes x , v , y , &c. expressi per dignitates ipsius z . Qui valores accommodabuntur ad conditiones Problematis ope coefficientium adhuc indeterminatorum. Et si horum valorum aliqui prodeunt in terminis numero finitis, vel in seriebus quæ ad expressiones finitas reduci possunt, ex hac parte dabitur solutio verè Mathematica in terminis numero finitis. Sed ubi Series ad terminos finitos reduci nequit, solutio pro Mechanicâ est habenda, atq; seriei usus erit in inventione radicis quæsitæ x , vel v , vel y , &c. per approximationes.

S C H O L I U M.

Reductio æquationum propositarum ad æquationes integrales in hac solutione plurimum pendet a solertiâ Analystæ in inventione incrementorum (per *Prop. 1.*) exercitati. Quare in hunc finem utile est quantitatum variis modis compositarum incrementa quærere, eaq; in tabulas referre, quæ deinde consuli possunt, quoties opus est alicujus incrementi integram invenire. Hujus generis est sequens tabella.

Incrementa.	Integrales.
1. $ax + bzx + czzz +$ $dz z z z + \&c.$	$A + \frac{1}{1} ax + \frac{1}{2} bzx + \frac{1}{3} czzz +$ $\frac{1}{4} dz z z z + \&c.$
2. $\frac{az}{zz} + \frac{bx}{zzz} + \frac{cx}{zzzz} +$ $\frac{dz}{zzzzz} + \&c.$	$A - \frac{a}{1z} - \frac{b}{2zz} - \frac{c}{3zzz} -$ $\frac{d}{4zzzz} - \&c.$

F

Fluxiones.

Fluxiones.

$$1. \dot{z} z^{\pm n}$$

$$2. \frac{\dot{z} z^{\theta} + \lambda \dot{x} z^{\lambda-1} x}{x^{\theta-1}}$$

$$3. \frac{\dot{z} x v^{\mu} + \lambda \dot{x} z^{\lambda-1} x v^{\mu} + \mu \dot{v} z^{\lambda} x^{\lambda} v^{\mu-1}}{x^{\theta-1}}$$

$$4. \frac{\dot{z} x v^{\mu} y^{\pi} + \lambda \dot{x} z^{\lambda-1} x v^{\mu} y^{\pi} + \mu \dot{v} z^{\lambda} x^{\lambda} v^{\mu-1} y^{\pi} + \pi \dot{y} z^{\lambda} x^{\lambda} v^{\mu} y^{\pi-1}}{x^{\theta-1}}$$

Fluentes.

$$\frac{1}{\pm n + 1} z^{\pm n + 1} + A.$$

$$A + z^{\theta} x^{\lambda}$$

$$A + z^{\theta} x^{\lambda} v^{\mu}$$

$$A + z^{\theta} x^{\lambda} v^{\mu} y^{\pi}$$

Comparando expressiones cum hujusmodi exemplis solvuntur quædam Problemata. Sit æquatio $\ddot{x} x x - \ddot{x}^2 x - 2 \dot{x}^2 \dot{x} = 0$. Comparando hanc æquationem cum fluxionis tertiæ factore $\dot{z} x v + \lambda \dot{x} z v + \mu \dot{v} z x$, invenitur $\vartheta = 1$, $\lambda = -1$, $\mu = -2$, ipsis $\dot{x}$, $\dot{x}$, $\dot{x}$ in hac æquatione subeuntibus vices ipsorum z , x , v , in fluxione istâ. Unde fit fluens $\ddot{x} x x - \ddot{x}^2 x - 2 \dot{x}^2 \dot{x}$ æqualis quantitati datæ, (quoniam est ipsius fluxio æqualis nihilo.) Sit itaq, a quantitas data, atq; erit $\ddot{x} x x - \ddot{x}^2 x - 2 \dot{x}^2 \dot{x} = a z$ (nempe completis ordinibus fluxionum per dignitates fluxionis datæ z .) Hinc fit $\ddot{x} = a z x x^2$; unde iterum regrediendo ad fluentes (ad exemplum fluxionis $\dot{z} z^{\pm n}$) fit $\dot{x} = \frac{a z x^3}{3} + b z$. Quo pacto jam revocatur æquatio fluxionalis ordinis tertii ad æquationem fluxionalem ordinis tantum primi.

Ad eundem modum potest æquatio $\ddot{x}^2 = x^3 \dot{z}^4$, vel (pro z scripto 1) $\ddot{x}^2 = x^3$ revocari ad ordinem superiorem. Nam extrahendo radicem

radicem fit $\ddot{x} = x^{\frac{3}{2}}$. Duc æquationem in $\dot{x}$, atq; fit $\ddot{x}x = \dot{x}x^{\frac{3}{2}}$; unde capiendo fluentes fit $\frac{\dot{x}^2}{2} = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + a$.

Sit alia æquatio $\ddot{x}^2 = \dot{x}x$: tum extractâ radice fit $\ddot{x} = x^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$, hoc est $\ddot{x}x^{\frac{1}{2}} = \dot{x}x^{\frac{1}{2}}$, unde capiendo fluentes fit $\frac{2}{3} \dot{x}^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + a$, vel si placet $\dot{x}^{\frac{3}{2}} = x^{\frac{3}{2}} + a$. Et hoc modo per multiplicationes, divisiones, & extractiones radicûm reducendo expressiones ad formas fluxionum cognitarum, vel inveniuntur ipsæ fluentes, vel revocantur æquationes ad fluxionum ordines superiores.

PROP. VII. THEOR. III.

Sint z & x quantitates duæ variabiles, quarum z uniformiter augetur per data incrementa z , & fit $nz = v$, $v - z = \dot{v}$, $\dot{v} - z = \ddot{v}$, & sic porro. Tum dico quod quo tempore z crescendo fit $z + v$, x item crescendo fiet

$$x + x \frac{v}{1z} + x \frac{vv}{1.2z^2} + x \frac{v \dot{v} \ddot{v}}{1.2.3z^3} + \&c.$$

DEMON.

DEMONSTRATIO.

x	x	x	x	x	&c.
$x+x$	$x+x$	$x+x$	$x+x$	x	&c.
$x+2x+x$	$x+2x+x$	$x+2x+x$	x		
$x+3x+3x+x$	$x+3x+3x+x$	x			
$x+4x+6x+4x+x$	x				
&c.					

Valores successivi ipsius x per additionem continuam collecti sunt x , $x+x$, $x+2x+x$, $x+3x+3x+x$, &c. ut patet per operationem in tabula annexa expressam. Sed in his valoribus x coefficientes numerales terminorum x , x , x , &c. eodem modo formantur, ac coefficientes terminorum correspondentium in dignitate binomii. Et (per Theorema *Newtonianum*) si dignitatis index fit n , coeffi-

cientes erunt $1, \frac{n}{1}, \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2}, \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3}, \&c.$ Er-

gò quo tempore z crescendo fit $z + nz$, hoc est $z + v$, fiet x aequa-

lis seriei $x + \frac{n}{1}x + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2}x + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3}x + \&c.$

Sed sunt $\frac{n}{1} = \left(\frac{nz}{z} = \right) \frac{v}{z}, \frac{n-1}{2} = \left(\frac{nz-z}{2z} = \right) \frac{v}{2z}, \frac{n-2}{3} =$

(nz

$\left(\frac{nz - 2z}{3z} = \right) \frac{\ddot{v}}{z}, \&c.$ Proinde quo tempore z crescendo fit $z + v$,

eodem tempore x crescendo fiet $x + x \frac{\dot{v}}{1z} + x \frac{\ddot{v}\dot{v}}{1.2z^2} + x \frac{\ddot{v}\dot{v}\dot{v}}{1.2.3z^3} +$
 $+ \&c.$

C O R O L L. I.

Et ipsis $z, x, \dot{x}, \ddot{x}, \&c.$ iisdem manentibus, mutato signo ipsius v ,
 quo tempore z decrescendo fit $z - v$, eodem tempore x decrescen-

do fiet $x - x \frac{\dot{v}}{1z} + x \frac{\ddot{v}\dot{v}}{1.2z^2} - x \frac{\ddot{v}\dot{v}\dot{v}}{1.2.3z^3} \&c.$ vel juxta notatio-

nem nostram $x - x \frac{\dot{v}}{1z} + x \frac{\ddot{v}\dot{v}}{1.2z^2} - x \frac{\ddot{v}\dot{v}\dot{v}}{1.2.3z^3} \&c.$ ipsis $\dot{v}, \ddot{v}, \&c.$

conversis in $-\dot{v}, -\ddot{v}, \&c.$

C O R O L L. II.

Si pro Incrementis evanescentibus scribantur fluxiones ipsis pro-
 portionales, factis jam omnibus $\dot{v}, \ddot{v}, v, \dot{v}, \ddot{v}, \&c.$ æqualibus

quo tempore z uniformiter fluendo fit $z + v$ fiet $x, x + x \frac{\dot{v}}{1z} +$

$+ x \frac{\dot{v}^2}{1.2z^2} + x \frac{\dot{v}^3}{1.2.3z^3} \&c.$ vel mutato signo ipsius v , quo tem-

pore z decrescendo fit $z - v$, x decrescendo fiet $x - x \frac{\dot{v}}{1z} +$

$- x \frac{\dot{v}^2}{1.2z^2} - x \frac{\dot{v}^3}{1.2.3z^3} + \&c.$

G

PROP.

PROP. VIII. PROB. V.

Data Æquatione præter uniformiter crescentem z involvente quotvis incrementa alterius variabilis x ; invenire valorem x ex dato z per seriem terminorum numero infinitam.

Per Propositionem primam quære æquationis propositæ incrementa omnia in infinitum. Tum si sit x_n infimum incrementum ipsius x in æquatione propositâ per has æquationes dabuntur omnia incrementa x_n & inferiora expressa per incrementa ipsa x_n superiora.

Sint $a, \& c, c, c, c, \&c.$ certi quidam valores correspondentes ipsorum $z, \& x, x, x, x, \&c.$ atque per easdem æquationes dabuntur omnes termini $\frac{c}{n}, \frac{c}{n+1}, \&$ sequentes expressi per terminos præcedentes ipsum $\frac{c}{n}$. Unde si pro z scribatur $a + v$, dabitur x per

æquationem $x = c + c \frac{v}{1z} + c \frac{v^2}{1.2z^2} + c \frac{v^3}{1.2.3z^3} + \&c.$ (per

Prop. 7.) Ubi terminorum coefficientes $c, c, c, \&c$ quorum numerus est n , dabuntur per totidem conditiones Problematis.

SCHOLIUM.

Ubi est x compositum aliquod ex dignitatibus integris affirmativis ipsius z , evanescentibus incrementis inferioribus, post certum numerum terminorum series abrumpetur & fiet finita. Sit æquatio $xz =$

$x + 1 = 0$, & sit $z = 1$. Tum capiendo incrementa, fiet $xz + x = 0$.

Sed

Sed hoc fieri nequit nisi sit $x = 0$; aliàs enim determinaretur z per æquationem $z + 1 = 0$. Ergò si pro z scribatur $a + v$, & sint c & c ipsorum x & x valores quando $v = 0$, erit semper $x = c + cv$, hoc est, (pro c scripto ipsius valore per æquationem propositam invento) $x = c + \frac{c-1}{a} v$, hoc est (pro v scripto ipsius valore $z - a$) $x = 1 + \frac{c-1}{a} z$.

In seriebus hoc modo prodeuntibus post aliquot terminos ex observatâ analogiâ plerumque possunt inveniri coefficientes sequentes absque ulteriori calculo. Et possunt nonnunquam series inventæ comparari cum aliis seriebus cognitis, quæ producuntur a cognitis expressionibus finitis: quare vice serierum substitutis istis expressionibus finitis, eo pacto dabuntur integrales in terminis numero finitis.

Sit æquatio fluxionalis $\ddot{x}z + n\dot{x}x - \dot{x} - x^2 = 0$, ubi pro z scribitur 1. Hinc fit $\ddot{x} = \frac{\dot{x} + x^2}{z + nx}$ vel (pro $z + nx$ scripto y) $\ddot{x} = \frac{\dot{x} + x^2}{y}$

Et per calculum continuatum invenietur $\ddot{x} = (2 - n \times \frac{x^2 + x^3}{y^2} =)$

$\frac{2-n}{y} \frac{x}{x} \ddot{x}, x = 3 - 2n \frac{x}{y} \ddot{x}, x = 4 - 3n \frac{x}{y} \ddot{x}$, & sic porro. Quare

(pro $a + nc$ scripto p) per hanc Prop. erit $x = c + cv + \frac{c^2 v^2}{2} +$

$\frac{2-n}{1.2.3p} c^3 v^3 + \frac{2-n.3-2n.c}{1.2.3.4p^2} c^4 v^4 + \&c.$ hoc est $x = c + cv +$

$\frac{c^2 p^2}{nc^2} \times \frac{n}{p} \times \frac{1}{2p} c^2 v^2 + \frac{n}{p} \times \frac{1}{2p} \times \frac{2-n}{3p} c^3 v^3 + \frac{n}{p} \times \frac{1}{2p} \times \frac{2-n}{3p} \times \frac{3-2n}{4p} c^4 v^4$

+ &c. Sed numeri $n, 1, 2-n, 3-2n, \&c.$ producuntur per continuam subtractionem numeri $n-1$. Quare si sit $p = n-1$, erit series

$\frac{n}{p} \times \frac{1}{2p} c^2 v^2 + \frac{n}{p} \times \frac{2-n}{3p} c^3 v^3 + \&c. = 1 + cv \Big|^{n-1} - 1 +$

$\frac{n}{n-1} c v$. Pone itaque $p = n - 1$, hoc est, fiat $a = n - 1 - nc$,
atque dabitur x per æquationem finitam $x = c + cv + c^{\frac{n-1}{nc^2}} x$

$\frac{n}{1 + cv} - 1 - \frac{n}{n-1} c v$; ubi est $\ddot{c} = \frac{c + c^2}{n-1}$, atque $v = z - n$

$+ 1 + nc$; atque incogniti c & $\dot{c}$ determinandi sunt per duas conditiones Problematis. Porro in hac æquatione x & z subeunt vices ipsorum z & x in æquatione $\ddot{x}x + \dot{x}x + nxz + \dot{x}z = 0$, quam adduximus in *Lem. I.* Eam verò in ordine ad inventionem hujus expressionis finitæ (absque isthac transformatione quidem frustra quæsitæ) transformavi per Propositionem tertiam. Cujus Propositionis usus quantus sit constat etiam ex hoc exemplo. Sed & fluente uniformiter z , ubi in æquatione propositâ involvuntur fluxiones secundæ, tertiæ, vel sequentes ipsius x , si per hanc Propositionem cupis invenire valorem ipsius z ex dato x , erit æquatio eodem modo transformanda.

Nonnunquam per alias transformationes inveniuntur expressiones finitæ. Sit æquatio $4x^3 - 4x^2 = \frac{1}{1+z^2} x^2$ (quam etiam adduximus in *Lem. I.*) Pono $x = v^\theta y^\lambda$, deinde substituto hoc valore x , & valore fluxionis $\dot{x}$ inde resultante, quærendo æquationis formam simplicissimam determino indices θ & λ , & valorem unius v vel y .

Hinc ergò fit $\dot{x} = \frac{\theta-1}{v} \dot{v} v^\theta + \lambda \dot{y} v^\lambda = \frac{\theta-1}{v} \dot{v} v^\theta + \lambda \dot{y} v^\lambda$, atque (per substitutionem)
 $4v^{3\theta} y^{3\lambda} - 4v^{2\theta} y^{2\lambda} = \frac{1}{1+z^2} v^{2\theta-2} y^{2\lambda-2}$. Pono $v = 1 + z^2$, & æquatio fit simplicior $4v^\theta y^\lambda - 4y^2 = \frac{2\theta z y + \lambda \dot{y} v}{1+z^2}$. Pono $\lambda = -2$ & fit $v^\theta - y^2 = \frac{\theta z y - \dot{y} v}{1+z^2}$, hoc est $v = \frac{\theta^2 z^2 y^2 - 2\theta z v y + v^2 y^2}{1+z^2}$. Pono deniq; $\theta = 1$, atque fit $sz^2 + 1 = v$, quo pacto

paſto æquatio diviſa per v fit $1 = y^2 - 2zy\ddot{y} + v\ddot{y}$. Unde capiendo fluxiones fit $0 = 2y\dot{y} - 2\dot{y}\dot{y} - 2z\ddot{y} - 2zy\ddot{y} + \ddot{v}\dot{y} + 2v\ddot{y}$, hoc eſt (pro v ſcripto ipſius valore $2z$) $- 2z\ddot{y} + 2v\ddot{y} = 0$. Hinc fit vel $\ddot{y} = 0$, vel $-zy + v\dot{y} = 0$. Si fiat $-zy + v\dot{y} = 0$, invenietur $y^2 = v$, adeoq; $x = (vy^{-2} =) 1$; quæ eſt ſingularis quædam ſolutio Problematis. Sed ſi fiat $\ddot{y} = 0$, pro ipſorum z, y , & $\dot{y}$ valoribus concurrentibus ſcriptis $0, a$, & $\dot{a}$, invenietur $a = \sqrt{1 - aa}$, adeoque erit $y = a + \sqrt{1 - aa}z$ (per hanc Propoſitionem,) & inde $x = (v^0 y^2 =)$

$$\frac{1 + z^2}{a + \sqrt{1 - a^2}z + 1}^2$$

Quoties fieri poteſt ipſius z valor datus æqualis nihilo, nec eo paſto termini ſeriei redduntur infiniti, ſeries prodibit in formâ ſimpliciori aſcendens per dignitates ipſius z . Et in hoc caſu poteſt aſſumi ſeries in terminis generalibus exprimens valorem x ; in quâ coefficients poſtea determinantur per comparationem terminorum, ad normam ſequentis exempli.

Sit æquatio $\ddot{x} - \dot{x}z - 2x = 0$. Pone $x = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \&c.$ Tum capiendo fluxiones fit $\dot{x} = B + 2Cz + 3Dz^2 + 4Ez^3 + \&c.$ atque $\ddot{x} = 2C + 6Dz + 12Ez^2 + \&c.$ Quibus valoribus ipſorum $x, \dot{x}, \ddot{x}$ in æquatione ſcriptis, & terminis diſpoſitis ſecundum dignitates ipſius z fit

$$\left. \begin{array}{l} 2C + 6Dz + 12Ez^2 + \&c. \\ -2A - 2Bz - 2Cz^2 - \&c. \\ -B - 2Cz - \&c. \end{array} \right\} = 0. \text{ In hac æquatione (ne fiat } z$$

quantitas determinata per æquationem affectam alicujus ordinis Analytici, quod in hoc caſu eſt abſurdum, quoniam ex hypotheſi

H eſt

est z quantitas variabilis, & semper ad libitum sumenda,) debent termini omnes evanescere per se, per valores coefficientium $A, B, C, \&c.$ Erit ergò per terminum primum $C = A$, per secundum $D = \frac{1}{2} B$, per tertium $E = \frac{1}{3} C = \frac{1}{3} A$, & sic porro; unde fit $x = A + Bz + Az^2 + \frac{1}{3} Bz^3 + \frac{1}{4} Az^4 + \&c.$

Ubi hoc modo procedere velis per assumptionem serierum in formis generalibus, sæpè difficile est istas formas invenire; præsertim si cupis coefficientes quot opus est indeterminatos esse relictos, ut consulatur conditionibus Problematis. Series quasdam particulares quærit *Newtonus* per extractiones radicum ab æquationibus affectis, & methodum docet, concinnam sanè & elegantem, inveniendi formas hujusmodi serierum, per dispositionem terminorum in parallelogrammis. Quod Artificium (factâ levi mutatione) in sequenti propositione explicabimus.

P R O P. IX. P R O B. VI.

Datâ æquatione fluxionali duas tantum Fluentes z & x , & earum Fluxiones involvente, quarum z uniformiter fluit per Fluxiones 1; invenire formas Serierum ascendentium per dignitates ipsius z , per quas exprimi possit valor ipsius x .

Seriei quæsitæ forma generalis est $Az^{\textcircled{1}} + Bz^{\textcircled{1}+\textcircled{n}} + Cz^{\textcircled{1}+2\textcircled{n}} + \&c.$ & in dato casu speciali determinandi sunt indices dignitatum $\textcircled{1}$ & $\textcircled{n}$. Qui tales esse debent, ut, converfis omnibus terminis æquationis propositæ in series, in iis substituendo valores ipsius x & fluxionum suarum per hanc seriem, & per ejus fluxiones expressos, possint termini omnium serierum hoc modo provenientium ita inter disponi, ut, per comparisonem terminorum in quibus sunt eadem dignitates ipsius z queant determinari coefficientes $A, B, C, D, \&c.$

vel omnes, vel quot fieri potest. Ad hoc duo requiruntur. Primum, ut indices dignitatum z , in seriebus ex terminis æquationis propositæ per substitutionem provenientes, omnes cadant in eandem seriem arithmeticè proportionalium; alias enim semper essent termini solitarii, per quos vel nihil determinaretur, vel fierent omnes coefficientes æquales nihilo. Secundò etiam requiritur, ut serierum hoc modo provenientium ad minimum duarum terminorum primorum indices inter se æquantur, ut determinetur coefficientis primus A : ne per terminum solitarium in initio æquationis ad comparisonem terminorum instituendam ordinatæ fiat coefficientis A , vel fortè quantitas aliqua data in æquatione propositâ, æqualis nihilo; quo pacto perturbetur ordo seriei inveniendæ.

His præmissis, si terminus aliquis æquationis propositæ seposito coefficiente dato sit $z^{\mu} x^a x^{\beta} x^{\gamma} x^{\delta} \&c.$ terminus primus seriei ab hoc termino provenientis, (seposito etiam coefficiente) erit

$z^{\mu + a + \beta + \gamma + \delta + \&c. \times \delta - \beta - 2\gamma - 3\delta - \&c.}$; & si pro indice

hujus termini scribatur π , series illa (sepositis coefficientibus) hæc

habebit formam $\dots z^{\pi} \dots z^{\pi + n} \dots z^{\pi + 2n} \dots z^{\pi + 3n} \dots \&c.$ ita

ut omnes series ex terminis æquationis propositæ provenientes ascendant per ipsius z dignitatem n . Hoc facile intelligitur paululum

attendendo ad formationes fluxionum seriei $Az^{\delta} + Bz^{\delta + n} + C$

$z^{\delta + 2n} + \&c.$ & ad geneses serierum ex terminis æquationis pro-

positæ per multiplicationes hujusmodi fluxionum in invicem. Ergò

per jam dicta, debent omnes π cadere in eandem seriem arithmeticè

proportionalium, quorum differentia est n , & ad minimum duo π

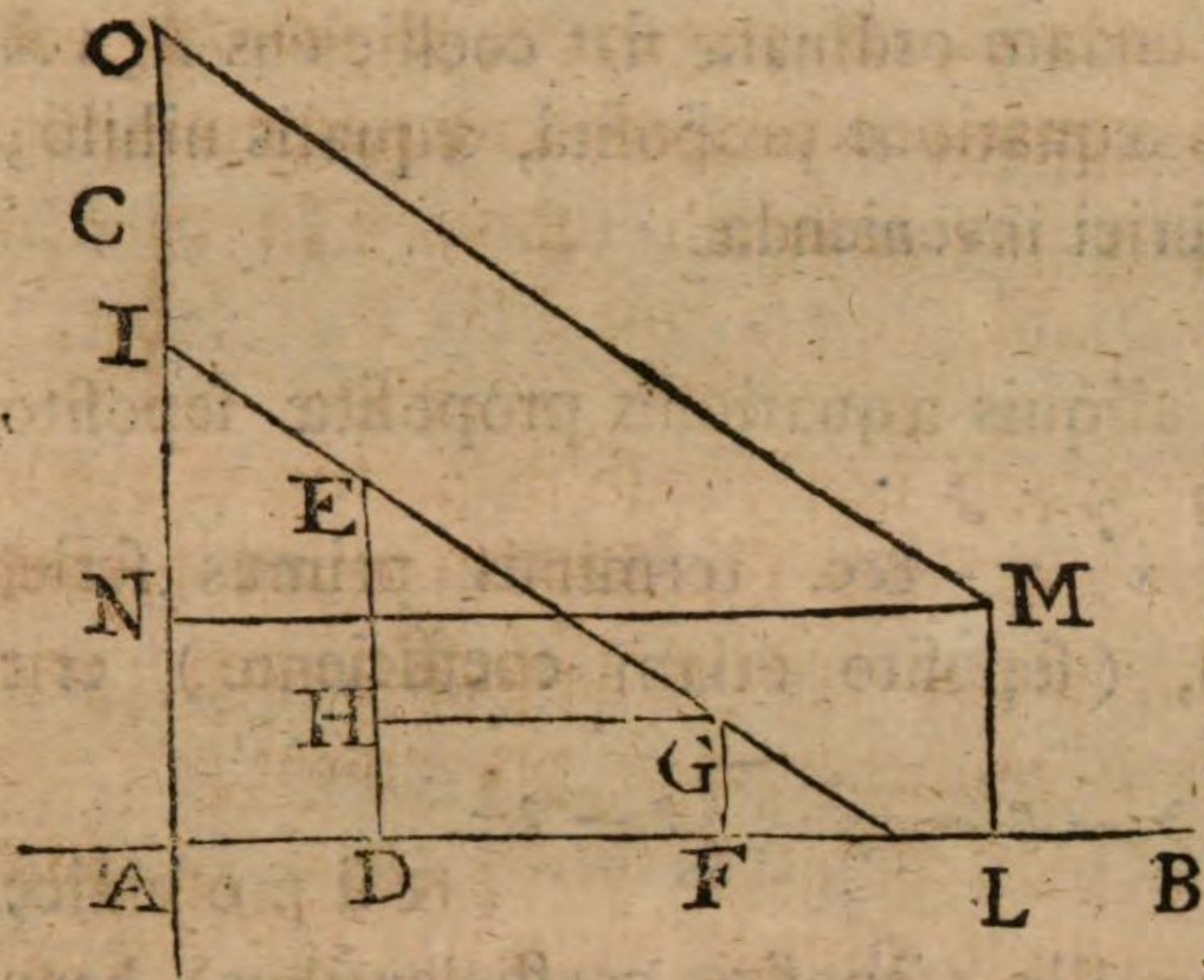
in principio æquationis transformatæ debent esse inter se æquales.

Qui vel omnium minimi erunt si sit n affirmativus, vel omnium

maximi si sit n negativus. Ergò percurrendo omnes terminos æqua-

tionis propositæ ex singulis colligatur numerus π vel $\mu + a + \beta + \gamma + \delta + \&c.$

$\overline{+ \&c.} \times s - \beta - 2\gamma - 3\delta - \&c.$ vel (pro $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \&c.$ scripto y , & pro $\mu - \beta - 2\gamma - 3\delta - \&c.$ scripto v ,) $ys + v$. Sint $ys + v$, & $ys + v$ duo ex hujusmodi numeris. Tum si hi numeri tales sint, ut facti inter se æquales, & inde determinato s , sint omnium numerorum $ys + v$ per istum valorem s provenientium vel maximi, vel minini, rectè determinabitur s . Hoc autem fit sequenti artificio.



Duc rectas infinitas AB, AC, & (sumptâ aliquâ lineâ pro unitate) in AB (ad dextram si fit y affirmativus, sed ad sinistram si fit y negativus) sume $AD = y$, & ductâ DE ipsi AC parallelâ, in eâ (sursum si fit v affirmativus, at deorsum si contrâ) sume $DE = v$, & colloca numerum $ys + v$ in puncto E. Omnibus numeris $ys + v$ in punctis hoc modo dispositis, sint eorum exteriora duo E & G, ita ut puncta reliqua omnia cadant ad easdem partes rectæ EG. Tum numeri in punctis E & G inter se facti æquales dabunt valorem indicis s . Duc enim GF parallelam ipsi CA & occurrentem AB in F, & sit M aliud punctum in quo collocatur alius numerus π , & ducatur ML parallela ipsi CA & occurrens AB in L, atq; occurrent GE ipsi AC in I, & ducatur ei parallela MO occurrens AC in O, atq; ducantur GH, MN ipsi AB parallelæ & occurrentes DE & AC in H & N. Tum numeri π collocati in punctis E, G, & M erunt $AD \times s + DE$, $AF \times s + FG$, & $AL \times s + LM$ (per constructionem). Quare si numeri in E & G fiant æquales

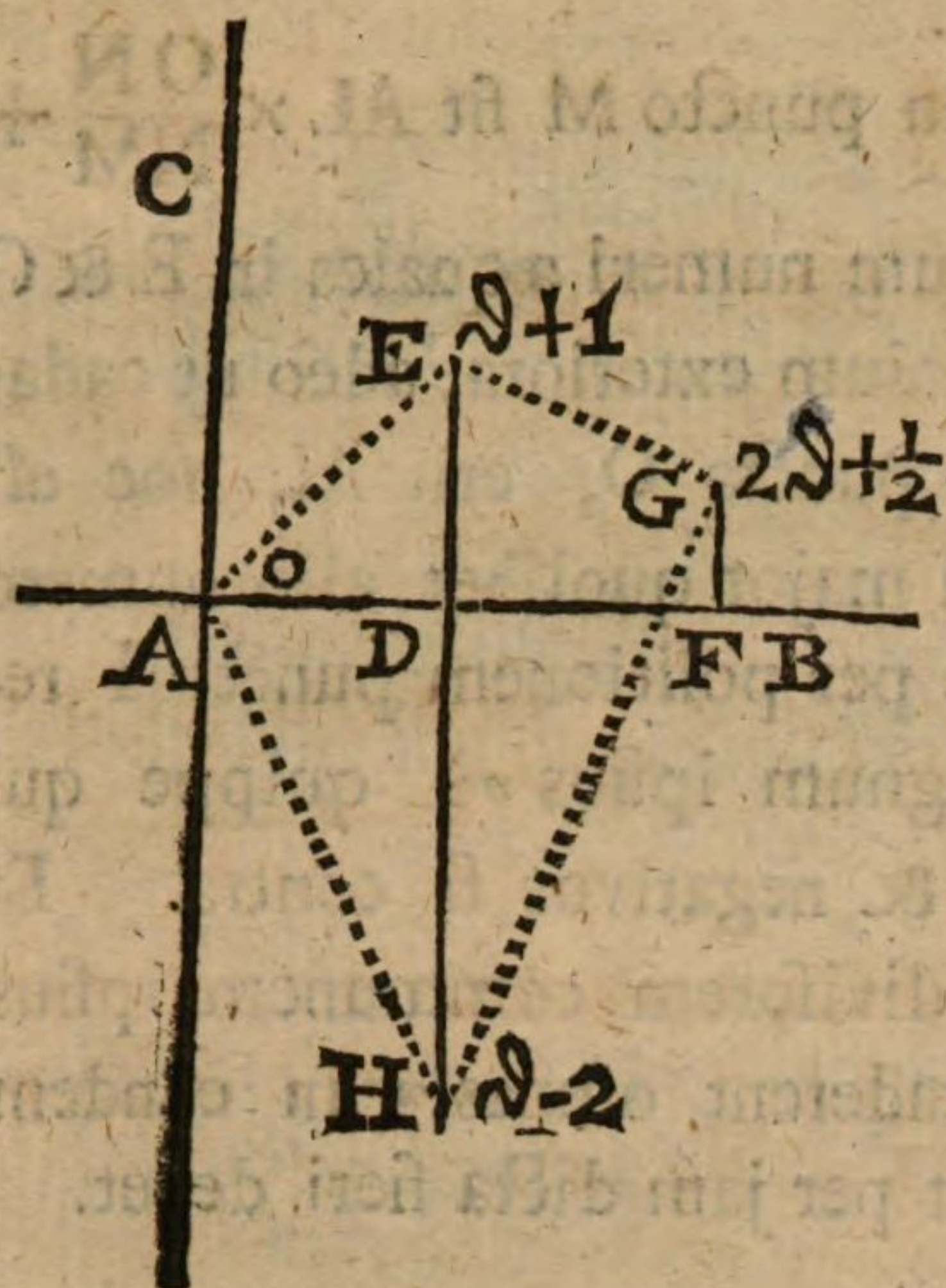
$$\text{erit } s = \frac{DE - FG}{AF - AD}, \text{ hoc est } s = \frac{HE}{HG}, \text{ vel (ob similia triangula EHG, ONM)} \frac{NO}{NM},$$

Unde

Unde jam numerus $AL \times s + LM$ in puncto M fit $AL \times \frac{ON}{NM} + LM$, hoc est AO ; atq; ad eundem modum numeri æquales in E & G fiunt AI . Unde si puncta E & G sint omnium exteriora, adeo ut cadat punctum I vel infra vel supra omnia puncta O , erit AI , hoc est numerus π in E , vel in G , minor, vel major quolibet alio numero AO in puncto quovis alio M . Unde per positionem puncti I respectu punctorum O , determinatur signum ipsius π ; quippe qui affirmativus est ubi I cadit infra O , & negativus si contra. Et hinc facile constat esse π maximum divisorem communem ipsius AI & omnium AO ; alias enim non caderent omnes π in eandem seriem arithmetice proportionalium, ut per jam dicta fieri debet.

Ergo numeris omnibus π in plano hoc modo dispositis, si applicetur regula ad puncta duo exteriora E & G , dabitur index s , atq; signum indicis π . Deinde invenietur ipse π sumendo maximum divisorem communem omnium numerorum π provenientium per valorem s jam inventum. Unde dabitur forma seriei quæsitæ. *Q. E. I.* Ipsius autem s signum est affirmativum ubi GE subtendit angulum CAB , atq; negativum ubi subtendit ejus complimentum ad duos rectos.

Sit hujus rei exemplum in æquatione $1 + zx - z^{\frac{3}{2}}xx - x'' = 0$. Percurrendo terminos hujus æquationis, in primo 1 sunt $\mu=0=\alpha=\beta=\gamma=\delta$ &c. Unde primus numerus π (vel $ys + v$) erit 0 . In secundo termino zx sunt $\mu=1=\alpha, \beta=0=\gamma=\delta$ &c. unde secundus numerus π fit $s + 1$. In tertio termino $z^{\frac{3}{2}}xx$ sunt $\mu=\frac{3}{2}, \alpha=1=\beta, \gamma=0=\delta$ &c. unde tertius π fit $2s + \frac{1}{2}$. Denique in ultimo termino x'' sunt $\mu=0=\alpha=\beta, \gamma=1, \delta=0$ &c. unde ultimus π fit $s - 2$.



Ductis itaque AB & AC, erit punctum A locus numeri π primi, vel 0. Sume abscissam $AD = 1$, & ordinatam ipsi AC parallelam $DE = 1$, atq; erit E locus secundi π , vel $s + 1$. Sume abscissam $AF = 2$, & ordinatam $FG = \frac{1}{2}$, atque erit G locus tertii π , vel $2s + \frac{1}{2}$. Sume denique $AD = 1$, & ordinatam $DH = -2$, atque erit H locus numeri $s - 2$.

Jam ductis rectis per puncta omnia exteriora, includentur omnia puncta trapezio AHGEA. Æquatis inter se numeris 0 & $s - 2$ in extremitatibus lateris AH, fiet $s = 2$, & omnes numeri π fient, 0, 0 ($= s - 2 = 0$), 3 ($= s + 1$), & $\frac{9}{2}$ ($= 2s + \frac{1}{2}$), quorum omnium minimi sunt duo æquales 0, & divisor maximus communis est $\frac{3}{2}$; quare in hoc casu est $n = \frac{3}{2}$.

Pro numeris æqualibus sumptis $s - 2$ & $2s + \frac{1}{2}$ in extremitatibus lateris HG, fit $s = -\frac{5}{2}$, & omnes numeri π fiunt $-\frac{9}{2}$, $-\frac{9}{2}$, $-\frac{3}{2}$, 0; quorum minimi sunt duo æquales $-\frac{9}{2}$, & maximus divisor communis est $\frac{3}{2}$; quare in hoc casu est $n = \frac{3}{2}$.

Si fiant $2s + \frac{1}{2}$ & $s - 1$ inter se æquales erit $s = \frac{1}{2}$, & numeri omnes erunt $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{2}$, 0, $-\frac{3}{2}$, quorum maximi sunt duo æquales $\frac{3}{2}$, & divisor communis est $\frac{3}{2}$; quare in hoc casu est $n = -\frac{3}{2}$.

Denique si fiat $s + 1 = 0$, erit $s = -1$, & omnes numeri erunt 0, 0, $-\frac{3}{2}$, -3 , quorum maximi sunt duo 0, & divisor maximus communis est $\frac{3}{2}$; quare in hoc casu est $n = -\frac{3}{2}$.

Potest

Potest ergo fieri

$$\text{vel 1. } x = Az^{\frac{1}{2}} + Bz^{\frac{3}{2}} + Cz^{\frac{5}{2}} + \&c.$$

$$\text{vel 2. } x = Az^{-\frac{1}{2}} + Bz^{-\frac{3}{2}} + Cz^{-\frac{5}{2}} + \&c.$$

$$\text{vel 3. } x = Az^{\frac{1}{2}} + Bz^{-\frac{1}{2}} + Cz^{-\frac{3}{2}} + \&c.$$

$$\text{vel 4. } x = Az^{-\frac{1}{2}} + Bz^{-\frac{3}{2}} + Cz^{-\frac{5}{2}} + \&c.$$

In casu tertio Analysis se habet ut infra exhibetur.

Æqu. proposita.		$1 + 2x - 2x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{5}{2}} = 0$
Æqu. assumpta.		$x = Az^{\frac{1}{2}} + Bz^{-1} + Cz^{-\frac{5}{2}} + \&c.$
Fluxiones.		$\dot{x} = \frac{1}{2} Az^{-\frac{1}{2}} - Bz^{-2} - \frac{5}{2} Cz^{-\frac{7}{2}} - \&c.$ $\ddot{x} = -\frac{1}{4} Az^{-\frac{3}{2}} + 2Bz^{-3} + \frac{35}{4} Cz^{-\frac{9}{2}} + \&c.$
Æquatio transformata.	$2x$ $-2x^{\frac{3}{2}}$ $1-x$	$Az^{\frac{3}{2}} + B + Cz^{-\frac{3}{2}} + \&c.$ $-\frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}AB + 2AC + B^2 + 1 + \frac{1}{4}A - \&c.$
Inventio Coefficientium	1. 2. 3. &c.	$A - \frac{1}{2}A^2 = 0.$ $B + \frac{1}{2}AB + 1 = 0.$ $C + 2AC + B^2 + \frac{1}{4}A = 0.$ $\&c.$
Valores Radicis x.	1. 2.	$Unde A = 2. \text{ vel } A = 0.$ $B = -\frac{1}{2}. \quad B = -1.$ $C = -\frac{3}{20}. \quad C = -1.$ $\&c. \quad \&c.$
		$x = 2z^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{3}{20}z^{-\frac{5}{2}} - \&c.$ $x = -z^{-1} - z^{-\frac{5}{2}} - \&c.$

In hac æquatione, ut vides, duæ sunt series exprimentes valorem ipsius x , prodeuntes per duos valores ipsius A in æquatione $A - \frac{1}{2} A^2 = 0$, & harum serierum secunda est ejusdem formæ ac series in casu ultimo; quare per unam hanc Analyfin invenitur utraque series, tam casus quarti, quam casus secundi. Quinetiam per Analyfin institutam in casu secundo eodem modo simul invenies seriem in casu primo. Unde per duas tantum Analyfes series omnes inveniuntur. Sed hoc in eo casu tantum fit ubi est x idem in duabus seriebus, atq; ubi una radix A in æquatione primâ inventâ per comparisonem terminorum est 0. Possunt autem plures esse radices A in istâ æquatione, pro genio cujusvis æquationis propositæ; & quot sunt radices A , tot dabuntur series per singulas Analyfes.

In hac Analyfi secundo observandum est, quod omnes omnino coefficientes A, B, C , &c. determinantur per comparisonem terminorum. Quare series hoc modo inventæ sunt omnes particulares, neque accommodari possunt ad conditiones Problematis, ob defectum coefficientium indeterminatorum.

S C H O L I U M.

Nonnunquam ubi index θ est numerus integer affirmativus, evanescent termini primi in seriebus exprimentibus fluxiones ipsius x : nam producuntur coefficientes istorum terminorum primorum per continuam multiplicationem ipsius A in numeros $\theta, \theta - 1, \theta - 2$, &c. In hoc casu sæpe fit ut terminus evanescat, qui debeat esse unus ex terminis in principio æquationis transformatæ, quo pacto series ista aliquando fit impossibilis. Sed si evanescant termini in genesi fluxionum, & tamen supersint termini duo in principio æquationis transformatæ, series adhuc dabitur; quæ etiam hoc erit cæteris præstantior, quod in eâ erunt coefficientes aliquot indeterminati, per quas accommodari potest series ad aliquot conditiones Problematis. Quinetiam per similem evanescentiam terminorum in produ-

Etione fluxionum sunt nonnunquam aliæ series radicem exprimentes, quæ per hanc propositionem minimè inveniuntur.

Quoniam de æquationum radicibus particularibus jam loquimur, libet etiam hoc unum obiter observare; nempe quod si v sit quantitas ex datis & variabilibus quovis modo composita, & possit æquatio ad talem formam reduci, ut omnis terminus involvat vel ipsum v , vel ejus incrementum aliquod, erit æquatio $v = 0$ particularis solutio Problematis. Si in æquatione hoc modo transformata involvatur ipsum v , æquatio $v = 0$ nullum continebit coefficientem indeterminatum, adeoque solutio hæc erit maxime particularis; præsertim si v integrales tantum involvat. Si æquationem transformatam non ingreditur v , sed $\dot{v}$, æquatio $v = 0$ continebit unum coefficientem indeterminatum. Si æquatio eadem non continet nec v , neq; $\dot{v}$, sed $\ddot{v}$, æquatio $v = 0$ continebit duos coefficientes indeterminatos: atq; in genere quo plures terminorum superiorum v , $\dot{v}$, $\ddot{v}$, &c. deficiunt in æquatione transformata eo generalior erit solutio Problematis per æquationem $v = 0$.

Ad hæc ubi v integrales tantum involvit potest commode inveniri Problematis solutio generalissima, per v & incrementa sua exterminando cæteras variables, & deinde quærendo radicem v per methodum aliquam jam traditam. Sic in æquatione $x - \frac{z}{x} - xz = 0$, pro

$x - \frac{1}{x}$ scripto v fit $v - \dot{v}z = 0$, hoc est $\frac{v\dot{z} - \dot{v}z}{v^2} = 0$. Sed ip-

sius $\frac{v\dot{z} - \dot{v}z}{v^2}$ fluens est $\frac{z}{v}$: quare pro quantitate quavis invaria-

bili scripto A erit $\frac{z}{v} = A$, hoc est $\frac{z}{x - \frac{1}{x}} = A$.

L E M M A II.

*Si datur x ex dato z per æquationem quamvis analyticam certi
cujusvis numeri dimensionum; etiam dabitur ipsius x incre-
mentum quodvis x ex dato z per æquationem ejusdem nu-
meri dimensionum.*

Nam quot sunt dimensiones ipsius x in æquatione propositâ,
tot sunt ejusdem radices (quippe etiam impossibiles ad numerando.)
Sed singulæ radices x sua habent incrementa. Quare tot sunt radi-
ces incrementi cujusvis x quot sunt radices ipsius integralis x ; adeoq;
utrumq; dabitur ex dato z per æquationes ejusdem numeri di-
mensionum. Q. E. D.

C O R O L L A R I U M.

Hinc propositâ æquatione definiente relationem singularis alicujus
incrementi x ad cognitam variabilem z , si dari potest integralis x
ex dato z per æquationem terminorum numero finitam, dabitur per
æquationem in quâ x ascendit ad tot dimensiones, atq; ascendit
 x in æquatione propositâ.

P R O P. X. P R O B. VII.

*Datâ æquatione unius dimensionis definiente valorem cujusvis
incrementi singularis x ; invenire valorem ipsius integralis
 x in terminis numero finitis, si fieri potest.*

Si dari potest relatio x ad quantitates cognitae in terminis numero finitis, dabitur per æquationem unius dimensionis (per *Cor. Lem. 2.*) Solutio itaque quærenda est tentando an quantitas, cui fit x æqualis, quo pacto reduci possit ad formam incrementi alicujus cogniti ejusdem ordinis. Quod si fit, dabitur radix x in terminis numero finitis, faciendo eam æqualem integrali istius expressionis. Sed si hoc fieri nequit res desperanda erit.

In fluxionibus quoties dari possunt fluentes in terminis numero finitis, inveniuntur per Quadraturam Curvarum Newtonianam. Et nonnunquam commodè inveniuntur hujusmodi expressiones per Propositiones duas sequentes:

PROP. XI. THEOR. IV.

Ipsius rs fluens exprimi potest per alterutram ex seriebus

$$\boxed{rs} = rs - rs + rs - rs + \text{Ec. vel } \boxed{rs} = rs - rs +$$

$$+ rs - \text{Ec.}$$

Theorema investigatur ad sequentem modum. Sit fluens quæ sita $rs + p$, hoc est, fit $\boxed{rs} = rs + p$. Tum capiendo fluxiones

erit $\dot{rs} = \dot{rs} + \dot{rs} + \dot{p}$, hoc est $\dot{p} = -\dot{rs}$; adeoque $p = -$

$\boxed{rs}$, indeque $\boxed{\dot{rs}} = rs - \boxed{rs}$. Itaque secundo fiat $\boxed{rs} =$

$\dot{rs} + q$; & capiendo fluxiones erit $\dot{rs} = \dot{rs} + \dot{\dot{rs}} + \dot{q}$, hoc est

$$q =$$

$$\dot{q} = -\dot{r}s, \text{ atque } \ddot{q} = -\ddot{r}s, \text{ adeoque } \boxed{\dot{r}s} = \dot{r}s - \dot{r}\dot{s} + \boxed{\dot{r}\dot{s}}.$$

$$\text{Et per operationes repetitas eodem modo invenitur } \boxed{\dot{r}s} = \dot{r}s - \dot{r}\dot{s} + \ddot{r}s - \ddot{r}\dot{s} + \boxed{\ddot{r}\dot{s}} = \&c.$$

Ad eundem modum fumendo fluentes ipsius s & fluxiones ipsius r investigatur series altera.

Quando hoc Theorema est applicandum ad casum particularem, eligenda est fluxio aliqua $\dot{w}$, & in computandis fluentibus $\dot{r}, \ddot{r}, \dddot{r}, \&c.$ vel $\dot{s}, \ddot{s}, \dddot{s}, \&c.$ cum primùm comparuerit fluens aliqua, ea du-cenda erit in $\dot{w}$, & producti fluens fumenda erit pro proximâ fluente quæsitâ. Item in computandis fluxionibus $\dot{r}, \ddot{r}, \dddot{r}, \&c.$ vel $\dot{s}, \ddot{s}, \dddot{s}, \&c.$ quoties colligitur fluxio aliqua, erit ea applicanda ad $\dot{w}$, & quotientis fluxio similiter applicata ad $\dot{w}$ fumenda erit pro fluxione proxime quæsitâ. Hæc autem fluxio $\dot{w}$ ita fumenda est ut termini sint quam fieri potest simplicissimi.

Potest etiam series per hoc Theorema inventa dupliciter accom-modari ad conditionem Problematis, hoc est, ad datum unum valorem fluentis quæsitæ respondentem dato valori variabilis cogni-tæ. Hoc fit primo fumendo omnes fluentes $r, \dot{r}, \ddot{r}, \&c.$ vel $s, \dot{s}, \ddot{s}, \&c.$ purè, absque ullâ correctione per additionem invaria-bilium, & deinde seriei inventæ addendo invariabilem per conditio-nem istam postea determinandam. Idem fit secundò fluentes omnes, cum primum prodierint, ita corrigendo per additiones invariabi-lium,

lium, ut omnes simul evanescant, (adeoque & series tota evanescat,) quando variabilis data est certi alicujus valoris.

Adhæc quando terminus aliquis $\dot{s}$, $\ddot{s}$, $\ddot{\dot{s}}$, &c. æqualis est nihilo, series prima abrumpitur, & fluentem dat in terminis numero finitis. Atque idem fit in serie alterâ, ubi evanescit terminus aliquis $\dot{r}$, $\ddot{r}$, $\ddot{\dot{r}}$, &c.

E X E M P. I.

Sit $x\dot{x} = -zx$, & propositum fit invenire fluentem ipsius zx . In hoc casu si pro r sumatur z , & pro s sumatur x , commodissimè fiet $\dot{w} = z\dot{z} (= -x\dot{x})$. Et hoc pacto sunt $r = z$, $\dot{r} = \left(\frac{\dot{w}}{w}r\right) = \frac{z^3}{3}$, $\ddot{r} = \left(\frac{\ddot{w}}{w}r\right) = \frac{z^5}{5 \cdot 3}$, $\ddot{\dot{r}} = \left(\frac{\ddot{\dot{w}}}{w}\dot{r}\right) = \frac{z^7}{7 \cdot 5 \cdot 3}$, & sic porro; Item $\dot{r} = \left(\frac{\dot{z}}{\dot{w}} = \right) \frac{1}{z}$, $\ddot{r} = \left(\frac{\ddot{r}}{\dot{w}} = \right) \frac{-1}{z^3}$, $\ddot{\dot{r}} = \left(\frac{\ddot{\dot{r}}}{\dot{w}} = \right) \frac{3}{z^5}$, & sic porro. Sunt etiam $s = x$, $\dot{s} = \left(\frac{\dot{s}}{\dot{w}} = \right) \frac{-1}{x}$, $\ddot{s} = \left(\frac{\ddot{s}}{\dot{w}} = \right) \frac{-1}{x^3}$, $\ddot{\dot{s}} = \left(\frac{\ddot{\dot{s}}}{\dot{w}} = \right) \frac{3}{x^5}$, & sic porro; item $\dot{s} = \left(\frac{\dot{s}}{\dot{w}} = \right) \frac{-x^3}{3}$, $\ddot{s} = \left(\frac{\ddot{s}}{\dot{w}} = \right) \frac{x^5}{5 \cdot 3}$, $\ddot{\dot{s}} = \left(\frac{\ddot{\dot{s}}}{\dot{w}} = \right) \frac{-x^7}{7 \cdot 5 \cdot 3}$, & sic porro. Unde per seriem priorem $rs - \dot{r}\dot{s} + \ddot{r}\ddot{s} - \ddot{\dot{r}}\ddot{\dot{s}} + \&c.$ fit $\left[\frac{\dot{z}}{z}\right]x = zx + \frac{z^3}{3x} - \frac{z^5}{5 \cdot 3x^3} + \frac{z^7}{7 \cdot 5x^5} - \&c.$ Et per seriem alteram $\dot{r}\dot{s} - \ddot{r}\ddot{s} + \ddot{\dot{r}}\ddot{\dot{s}} - \&c.$ fit $\left[\frac{\dot{z}}{z}\right]x = \frac{-x^3}{3z} + \frac{x^5}{5 \cdot 3z^3} - \frac{x^7}{7 \cdot 5z^5} + \&c.$ In

In his feriebus fluentes $r, \dot{r}, \ddot{r}$, &c. item $s, \dot{s}, \ddot{s}$, &c. sumuntur pure; quare series accommodandæ sunt ad conditionem Problematice per additionem quantitatum invariabilium. Porro per harum serierum primam exhibetur area circularis adjacens finui x & cofinui z , & per seriem alteram exhibetur ejusdem areæ complimentum ad quadrantem cum signo negativo: Quod ita fit quoniam area illa adjacet abscissæ z ultra ordinatam productæ.

E X E M P. II.

Sit $x = a + bz^n$, & invenienda fit fluens ipsius $zx^{\theta-1} x^{\lambda-1}$. In hoc casu si fiat $r = zx^\theta$, & $s = x^{\lambda-1}$ commodissime fit $w = x = bz^n$. Unde sumendo fluentes pure, ad inveniendam seriem priorem erit

$$r = \frac{z}{\theta}.$$

$$\dot{r} = \left(\left[\begin{array}{c} \dot{r} \\ w r \end{array} \right] = \right) \frac{n b z^{\theta+n}}{\theta+n \cdot \theta} = \frac{n b z^n}{\theta+n} r.$$

$$\ddot{r} = \left(\left[\begin{array}{c} \ddot{r} \\ w r \end{array} \right] = \right) \frac{n^2 b^2 z^{\theta+2n}}{\theta+2n \cdot \theta+n \cdot \theta} = \frac{n^2 b z^n}{\theta+2n} \dot{r}.$$

$$\dddot{r} = \left(\left[\begin{array}{c} \dddot{r} \\ w r \end{array} \right] = \right) \frac{n^3 b^3 z^{\theta+3n}}{\theta+3n \cdot \theta+2n \cdot \theta+n \cdot \theta} = \frac{n^3 b z^n}{\theta+3n} \ddot{r}.$$

& sic porro.

Item

Item $s = x^{\lambda-1}$

$$\dot{s} = \left(-\frac{\dot{s}}{w} = \right) \frac{\lambda-2}{\lambda-1} x^{\lambda-2} = \frac{\lambda-1}{x} s.$$

$$\ddot{s} = \left(-\frac{\dot{s}}{w} = \right) \frac{\lambda-3}{\lambda-2 \cdot \lambda-1} x^{\lambda-3} = \frac{\lambda-2}{x} \dot{s}.$$

$$\ddot{\ddot{s}} = \left(-\frac{\ddot{s}}{w} = \right) \frac{\lambda-4}{\lambda-3 \cdot \lambda-2 \cdot \lambda-1} x^{\lambda-4} = \frac{\lambda-3}{x} \ddot{s}.$$

& sic porro,

Unde (pro integris terminis cum suis signis scribendo A, B, C, &c.) fit

$$\boxed{\frac{\cdot^{\theta-1} \lambda-1}{zx \quad x}} = \frac{z x^{\theta} x^{\lambda-1}}{\theta} + \frac{-\lambda n + n}{\theta + n} \cdot \frac{bx^n}{x} A + \frac{-\lambda n + 2n}{\theta + 2n} \cdot \frac{bx^n}{x} B +$$

$$\frac{-\lambda n + 3n}{\theta + 3n} \cdot \frac{bx^n}{x} C + \&c.$$

Et ad inveniendam seriem alteram fit

$$\dot{r} = \left(\frac{\dot{zx}}{w} = \right) \frac{z^{\theta-n}}{nb}.$$

$$\ddot{r} = \left(\frac{\dot{r}}{w} = \right) \frac{\theta-n \cdot z}{n^2 b^2} = \frac{\theta-n}{nbz} \dot{r}$$

$$\ddot{\ddot{r}} = \left(-\frac{\ddot{r}}{w} = \right) \frac{\theta-2n \cdot \theta-n \cdot z}{n^3 b^3} = \frac{\theta-2n}{nbz} \ddot{r}$$

& sic porro.

Item

$$\text{Item } s = \left(\frac{\overline{w s}}{\overline{w s}} = \right) \frac{x^\lambda}{\lambda}$$

$$s' = \left(\frac{\overline{w s'}}{\overline{w s'}} = \right) \frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1 \cdot \lambda} = \frac{x}{\lambda+1} s$$

$$s'' = \left(\frac{\overline{w s''}}{\overline{w s''}} = \right) \frac{x^{\lambda+2}}{\lambda+2 \cdot \lambda+1 \cdot \lambda} = \frac{x}{\lambda+2} s'$$

& sic porro.

Unde (pro terminis integris cum suis signis scriptis A, B, C, &c.) fit

$$\frac{\overline{z z^{\theta-1} x^{\lambda-1}}}{z z x} = \frac{z^{\theta-n} x^\lambda}{\lambda n b} + \frac{-\theta+n}{\lambda n+n} \cdot \frac{x}{b z^n} A + \frac{-\theta+2n}{\lambda n+2n} \cdot \frac{x}{b z^n} B +$$

$$\frac{-\theta+3n}{\lambda n+3n} \cdot \frac{x}{b z^n} C + \&c.$$

In his seriebus per terminos jam appositos satis constat ratio formandi reliquos. Cæterum quando est λ numerus integer affirmativus, series prima tandem abrumpitur, & fluentem exhibet in terminis numero finitis. Quod idem fit in serie alterâ, ubi est θ multiplex integer affirmativus ipsius n .

EXEMP. III.

Propositâ eadem fluxione $z z^{\theta-1} x^{\lambda-1}$, fit series invenienda, quæ æqualis est nihilo quando $z = c$; idque fit faciendum in serie ascendente per dignitates ipsius x , & descendente per dignitates z . Hinc ubi est $z = c$, erit $x = a + bc^n$. Pro $a + bc^n$ scribe d , atque erit d valor ipsius x quando series tota debet evanescere. Itaque facto

$$z = z z^{\theta-1}, s = x^{\lambda-1}, \text{ \& pro } w \text{ sumpto } x = nb z z^{\eta-1}, \text{ existentibus}$$

M r,

$\dot{r}$, $\ddot{r}$, $\dddot{r}$, &c. iisdem ac in exemplo præcedenti, invenientur fluentes
 $\dot{s}$, $\ddot{s}$, $\dddot{s}$, &c. modo sequenti.

Est $\dot{s}$ fluens ipsius ms , h. e. ipsius $xx^{\lambda-1}$. Hujus fluens pura est
 $\frac{x^\lambda}{\lambda}$, quare ut evanescat $\dot{s}$ ubi est $x = d$, hinc dempto $\frac{d^\lambda}{\lambda}$ fit $\dot{s} =$
 $\frac{x^\lambda}{\lambda} - \frac{d^\lambda}{\lambda}$. Et per similes correctiones fit

$$\dot{s} = \frac{x^\lambda}{\lambda} - \frac{d^\lambda}{\lambda}$$

$$\ddot{s} = \frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1.\lambda} - \frac{d^\lambda x}{1.\lambda} + \frac{d^{\lambda+1}}{1.\lambda+1}$$

$$\dddot{s} = \frac{x^{\lambda+2}}{\lambda+2.\lambda+1.\lambda} - \frac{d^\lambda x^2}{2.1.\lambda} + \frac{d^{\lambda+1} x}{1.1.\lambda+1} - \frac{d^{\lambda+2}}{2.1.\lambda+2}$$

& sic porro.

Cæterum ex terminis jam apposis satis constat ratio formandi
 reliquos.

SCHOLIUM.

I. Potest fluxio proposita variis modis resolvi in factores r & s ,
 unde plerumque oriuntur series diversæ. Sic fluxio jam proposita

$zz^{\theta-1} \times \frac{a+bz^n}{a+bz^n}^{\lambda-1}$ etiam sic scribi potest $zz^{\theta+\lambda n-n-1} \times \frac{b+az^{-n}}{b+az^{-n}}^{\lambda-1}$.

Ubi si pro r , s , & w sumantur $zz^{\theta+\lambda n-n-1}$, $\frac{b+az^{-n}}{b+az^{-n}}^{\lambda-1}$, &

$\frac{1}{a+bz^n}$, & pro $a+bz^n$ scribatur x , exprimetur eadem fluens

per series sequentes;

$$\left[\frac{z^{\theta-1} x^{\lambda-1}}{zz \quad x} \right] = \frac{z^{\theta} x^{\lambda-1}}{\theta + \lambda n - n} + \frac{\lambda n - n}{\theta + \lambda n - 2n} \cdot \frac{a}{x} A + \frac{\lambda n - 2n}{\theta + \lambda n - 3n} \cdot \frac{a}{x} B$$

$$+ \frac{\lambda n - 3n}{\theta + 2\lambda n - 4n} \cdot \frac{a}{x} C + \&c.$$

$$\left[\frac{z^{\theta-1} x^{\lambda-1}}{zz \quad x} \right] = \frac{-z^{\theta} x^{\lambda}}{\lambda n a} + \frac{\theta + \lambda n}{\lambda n + n} \cdot \frac{x}{a} A + \frac{\theta + \lambda n + n}{\lambda n + 2n} \cdot \frac{x}{a} B + \frac{\theta + \lambda n + 2n}{\lambda n + 3n}$$

$$\cdot \frac{x}{a} C + \&c.$$

Ubi literæ A, B, C, &c. scribuntur pro totis terminis cum suis signis in seriebus respectivis.

2. In investigatione Theorematis inveniebatur $\left[\frac{r}{s} \right] = r s -$

$\left[\frac{r}{s} \right]$. Unde si pro r & s sumantur zz & $a + bz^n$, & pro

$$a + bz^n \text{ scribatur } z, \text{ erit } \left[\frac{z^{\theta} x^{\lambda}}{zz \quad x} \right] = \frac{z^{\theta+1} x^{\lambda}}{\theta + 1} - \left[\frac{\lambda n b z^{\theta+n} x^{\lambda-1}}{\theta + 1} \right],$$

$$\text{hoc est, } \left[\frac{z^{\theta+n} x^{\lambda-1}}{zz \quad x} \right] = \frac{z^{\theta+1} x^{\lambda}}{\theta + 1} - \frac{\lambda n b}{\theta + 1} \left[\frac{z^{\theta+1} x^{\lambda-1}}{zz \quad x} \right]. \text{ Datâ itaque}$$

fluente ipsius $zz \quad x^{\lambda}$, dabitur etiam fluens ipsius $zz \quad x^{\theta-n \lambda-1}$. Unde si pro n sumantur successivè numeri quicunque integri, vel affirma-

tivi, vel negativi, si datur fluens unius $zz \quad x^{\theta+n \lambda-n}$, dabuntur

etiam fluentes omnium $zz \quad x^{\theta+n \lambda-n}$.

3. Potest etiam eadem fluxio sic scribi $zz \quad \frac{b + az^{-n/\lambda}}{b + az^{-n/\lambda}}$: ubi

si jam pro r sumatur $zz \quad \frac{b + az^{-n/\lambda}}{b + az^{-n/\lambda}}$, & pro s sumatur $b + az^{-n/\lambda}$, erit

$$\left[\frac{z^{\theta} x^{\lambda}}{zz \quad x} \right] = \frac{z^{\theta+n-1} \times b + az^{-n/\lambda}}{\theta + \lambda n + 1} + \frac{\lambda n a}{\theta + \lambda n + 1} \left[\frac{z^{\theta+\lambda n-n} \times b + az^{-n/\lambda}}{zz \quad x} \right]$$

hoc

hoc est $\boxed{\frac{z^\theta x^\lambda}{zz x}} = \frac{z^{\theta+1} x^\lambda}{\theta+\lambda n+1} + \frac{\lambda n z}{\theta+\lambda n+1} \boxed{\frac{z^\theta x^{\lambda-1}}{zz x}}$. Datâ itaque

fluente ipsius $zz z$, dabitur etiam fluens ipsius $zz x^{\lambda-1}$, & vice versa. Manente itaque indice θ , si continuo minuatur, vel augeatur λ per unitates, datâ fluente unius $zz x^\lambda$, dabuntur fluentes omnium $zz x^\lambda$. Et per hos duos casus conjunctos, si pro σ & τ scribantur successive numeri quicunque integri, vel affirmativi vel negativi, manentibus θ & λ , si datur fluens unius cujusvis fluxionis $zz x^{\theta+\sigma n} \times \frac{a + bz^n}{\lambda + \tau}$, dabuntur etiam fluentes omnium fluxionum eodem modo provenientium. Et ad eundem modum pergere licet ad comparationem fluentum, ubi quantitas in vinculo radicis est trium, vel quatuor, vel plurium nominum. Sed hæc jam elegantius fiunt ab illustrissimo *Newtono* in *Quadraturâ Curvarum*.

PROP. XII. THEOR. V.

Sit n index ordinis fluentis ipsius $Q = rs$, verbi gratiâ si

$n = 2$, ut sit $\overset{n}{Q} = \overset{n}{Q}$, si $n = 0$, ut sit $\overset{n}{Q} = \overset{n}{Q} = Q$, si

$n = -1$, ut sit $\overset{n}{Q} = \overset{n}{Q} = \dot{Q}$, & sic de cæteris; tum

erit $\overset{n}{Q} = \overset{n}{rs} = \overset{n}{r} s - \frac{\overset{n}{r}}{1} s + \frac{\overset{n}{r}}{1} \cdot \frac{\overset{n}{s}}{2} r s - \frac{\overset{n}{r}}{1} \cdot \frac{\overset{n}{s}}{2} \cdot \frac{\overset{n}{s}}{3} r s + \text{Ec.}$ Ubi

est $n=1$, & (juxtâ notationem nostram) sunt $\overset{n}{n} = n - n$,

$\overset{n}{n} = n + n$, $\overset{n}{n} = n + n$, & sic porro.

Quando

Quando est $n = 1$ Theorema idem est cum præcedenti; unde colligitur forma seriei. Coefficientes autem $1, \frac{n}{1}, \frac{n}{1} \times \frac{n}{2}, \frac{n}{1} \times \frac{n}{2} \times \frac{n}{3}, \&c.$ sic investigo.

Sint coefficientes quæfiti $x, v, y, w, \&c.$ iidemque incrementis suis $x, v, y, w, \&c.$ aucti $x, v, y, w, \&c.$ Si ergò sit $Q = x r s + v r s + y r s + w r s + \&c.$ erit proximè $Q = x r s + v r s + y r s + w r s + \&c.$ Jam si coefficientes $x, v, y, w, \&c.$ sint iusti valoris, manentibus coefficientibus novis $x, v, y, w, \&c.$ si capiatur fluxio novæ seriei fiet regressio in seriem priorem. Ergò capiendo fluxiones primo in r , deinde in s , fit $Q = x r s + v r s +$

$+ y r s + w r s + \&c.$ Unde comparando terminos hujus seriei $+ v$ $+ y$

cum terminis relativis seriei prioris, fit $x (= x + x) = x$; adeoque $x = 0$. Proinde est x invariabilis. Sed ubi $n = 0$ est $x = 1$;

quare est semper $x = 1$. Comparando terminos secundos, fit $v + x (= v + v + 1) = v$; adeoque $v (= -1) = -n$; &

inde $v = \frac{-n}{1} + a$. Sed ubi $n = 0$, est $v = 0$; quare est $a = 0$,
& $v = \frac{-n}{1}$. Comparando terminos tertios fit $y + v (= y + y -$

$\frac{n}{1}) = y$; adeoque $y = \frac{n}{1}$; & inde $y = \frac{n \cdot n}{1 \cdot 2} + b$. Sed ubi $n = 0$,

est $y = 0$; ergo est $b = 0$, atque $y = \frac{n \cdot n}{1 \cdot 2}$. Eodem modo fit

$w + y (= w + w + \frac{n \cdot n}{1 \cdot 2}) = y$; adeoque $w = -\frac{n \cdot n}{1 \cdot 2}$ & inde

$w = -\frac{n \cdot n \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3}$. Et sic pergendo in infinitum invenientur reliqui

coefficientes, omnino ut in Theoremate exhibentur.

E X E M P L U M.

Hoc pacto ipsius $Q = z z^{\theta-1} \times a + b z^n |^{\lambda-1} (= z z^{\theta-1} x^{\lambda-1})$
fluens quævis in genere est

$$\text{vel 1. } Q = \frac{\frac{n}{1} b z^{\theta+n} x^{\lambda-1}}{\theta \cdot \theta + n \cdot \theta + 2n \dots \dots \theta + n n} + \frac{n - \lambda n}{\theta + n n} \cdot \frac{n b z^n}{1 \cdot x} A + \frac{2n - \lambda n}{\theta + n n}$$

$$\frac{n b z^n}{2x} B + \frac{3n - \lambda n}{\theta + n n} \cdot \frac{n b z^n}{3x} C + \&c.$$

$$\text{vel 2. } Q = \frac{z^{\theta-n} x^{\lambda+n}}{\lambda \cdot \lambda + 1 \cdot \lambda + 2 \dots \dots \lambda + n \cdot n b} + \frac{n - \theta}{\lambda n + n n} \cdot \frac{n x}{1 b z^n} A +$$

$$\frac{2n - \theta}{\lambda n + n n} \cdot \frac{n x}{2 b z^n} B + \frac{3n - \theta}{\lambda n + n n} \cdot \frac{n x}{3 b z^n} C + \&c.$$

vel

$$\text{vel } 3. \overset{n}{Q} = \frac{\overset{n}{n} \overset{\theta - n}{z} \overset{\lambda - 1}{x}}{\overset{n}{n} a} + \frac{\overset{n}{n} \overset{\theta - n}{z} \overset{\lambda - 1}{x}}{\theta - n + \lambda n. \theta - n + \lambda n - n. \theta - n + \lambda n - 2n. \dots \theta - n + \lambda n - n n} +$$

$$\frac{\lambda n - n}{\theta - n + \lambda n - n n} \cdot \frac{n a}{1 x} A + \frac{\lambda n - 2n}{\theta - n + \lambda n - n n} \cdot \frac{n a}{2 x} B + \&c.$$

$$\text{vel } 4. \overset{n}{Q} = \frac{\overset{\lambda + n}{x} \overset{\theta + n \lambda n - n n}{z}}{\lambda. \lambda + 1. \lambda + 2. \dots \lambda + n. n a} + \frac{\theta + \lambda n}{\lambda n + n n} \cdot \frac{n a}{1 x} A +$$

$$\frac{\theta + \lambda n + n}{\lambda n + n n} \cdot \frac{n a}{2 x} B + \&c.$$

Quippe in seriebus duabus primis pro w sumpto $n b z x^{n-1}$, & facto $\overset{\cdot}{Q} = \boxed{\overset{\cdot}{w} Q}$, $\overset{\cdot\cdot}{Q} = \boxed{\overset{\cdot\cdot}{w} \overset{\cdot}{Q}}$, & sic porro; & in seriebus duabus ultimis pro w sumpto $-n a z x^{-n-1}$, & similiter facto $\overset{\cdot}{Q} = \boxed{\overset{\cdot}{w} Q}$, $\overset{\cdot\cdot}{Q} = \boxed{\overset{\cdot\cdot}{w} \overset{\cdot}{Q}}$, & sic porro.

Per has autem series exhibentur tam fluxiones quam fluentes ipsius Q . Sic si $n = -1$, series dabit valorem $\overset{\cdot}{Q}$, si $n = -2$, series dabit valorem $\overset{\cdot\cdot}{Q}$, & sic porro.

Sed in hoc casu, ubi mutatur signum numeri n , quædam est difficultas in inventione coefficientis termini primi. Sit ergo exemplum methodi hoc faciendi in termino primo seriei primæ modo exhibitæ pro valore $\overset{n}{Q}$. Hujus termini coefficientis, seposito

$$\overset{n}{n} \overset{n}{b}, \text{ est } \frac{1}{\theta. \theta + n. \theta + 2n. \dots \theta + n n}. \text{ Debet autem hujus coefficientis}$$

cientis maximus divisor esse $\theta + n$. Quare ut inveniatur coefficientis

ubi est n numerus negativus, vice $\theta \cdot \theta + n \cdot \theta + 2n \&c.$, scribe

$$\frac{\&c. \theta - 4n \cdot \theta - 3n \cdot \theta - 2n \cdot \theta - n}{\&c. \theta - 4n \cdot \theta - 3n \cdot \theta - 2n \cdot \theta - n \cdot \theta \cdot \theta + n \cdot \theta + 2n \cdot \&c.} \quad \text{Tum rejectis}$$

omnibus divisoribus post $\theta + n$, quando est $n = 1$, coefficientis

$$\text{erit } \frac{\&c. \theta - 2n \cdot \theta - n}{\&c. \theta - 2n \cdot \theta - n \cdot \theta \cdot \theta + n}, \text{ hoc est, } \frac{1}{\theta \cdot \theta + n}; \text{ quando est } n =$$

$$0, \text{ erit coefficientis } \frac{\&c. \theta - 2n \cdot \theta - n}{\&c. \theta - 2n \cdot \theta - n \cdot \theta}, \text{ hoc est } \frac{1}{\theta}. \text{ Et eodem ar-}$$

$$\text{gumento ubi } n = -1, \text{ erit coefficientis } \frac{\&c. \theta - 2n \cdot \theta - n}{\&c. \theta - 2n \cdot \theta - n}, \text{ hoc est } 1;$$

$$\text{ubi } n = -2 \text{ erit coefficientis } \frac{\&c. \theta - 2n \cdot \theta - n}{\&c. \theta - 2n}, \text{ hoc est } \theta - n, \text{ ubi}$$

est $n = -3$, coefficientis erit $\theta - 2n \cdot \theta - n$; & sic porro. Unde jam si sit m index fluxionis quæsitæ ipsius Q , hoc est si pro $-n$

scribatur m , erit $\theta - mn \cdot \theta - mn \cdot \theta - mn \dots \theta - n$ coefficientis numeralis termini primi seriei quæsitæ.

SCHOLIUM.

Pergere jam liceret ad inventionem integralium in terminis numero finitis, quarum incrementa singularia dantur per æquationes affectas altiorum graduum. Sed quoniam in his casibus solutio quæri non potest nisi per calculum valde nimis prolixum, operæ pretium non duxi præcepta plura tradere in re nullius usus futurâ. Æquationes quadraticæ revocantur ad æquationes simplices per extractionem radicis, atque æquationes cubicæ resolvuntur per regulam *Cardani*, & æquationes plurium dimensionum etiam resolvi possunt per ablationem terminorum intermediarum. Quare si cui animus est rem adeo laboriosam tentare, terminis omnibus intermediis

diis exterminatis, deinde solutio quæri potest per Propositiones præcedentes. Tantum autem laborem paululum minuere potest hæc observatio, nempe quod in æquatione affectâ definiente valorem incrementi, termini secundi coefficientis est simile incrementum coefficientis termini secundi in æquatione definiente valorem ipsius integralis. Quare factò periculo in coefficiente termini secundi, si is revocari nequit ad integram in terminis numero finitis, frustra erit solutionem finitam quærere in cæterâ æquatione.

Principiis Methodi Incrementorum & Methodi Fluxionum jam breviter explicatis, superest ut in parte alterâ hujus opusculi exemplis aliquot ostendamus, quantus sit usus hujus rei in solutione difficiliorum quorundam Problematum.



METHODUS Incrementorum.

PARS SECUNDA.

*Ubi Exemplis aliquot ostenditur quomodo hæc
Methodus sit applicanda ad Problemata
Mathematica & Physica.*

PROP. XIII. PROB. VIII.

*Datis aliquot terminis æquedistantibus in Serie quantitatum;
invenire terminos intermedios, & ulteriores quam proximè ex
datis eorum distantis ab alterutro termino extremo dato.*



UNTO a, b, c, d , termini æquedistantes dati, &
requiratur terminus alius aliquis ex datâ suâ distan-
tiâ a termino extremo a .

Sumantur terminorum datorum differentia, deinde
differentiarum differentia, & sic porro, donec perventum sit ad dif-
ferentiam

ferentiam ultimam, & sint differentiae illae sub propriis signis
 $a (= b - a), b (= c - b), c (= d - c), a (= b - a), b (=$
 $c - b), a (= b - a)$ Iam pro quolibet termino seriei in genere
 scribe x , & pro ejusdem termini distantia a termino a scribe z , &
 fit ipsius z incrementum z æquale distantiae datae inter terminos
 datos a, b, c, d , atque finge omnes terminos seriei in genere expri-
 mi per æquationem $x = A + Bz + Cz^2 + Dz^3$. Tum (per
Prop. 1.) differentia inter duos valores ipsius x ad distantiam ab
 invicem z exprimetur per æquationem $x = Bz + 2Cz^2 +$
 $3Dz^3$, & hujusmodi differentiarum differentiae exprimentur per
 æquationem $x = 2Cz^2 + 2.3Dz^3$, & differentia tertia per æqua-
 tionem $x = 2.3Dz^3$. Sed ubi est $z = 0$, sunt $x = a, x = a,$
 $x = a, x = a$; unde per has æquationes fiunt $A = a, Bz = a,$
 $2Cz^2 = a, 2.3Dz^3 = a$, adeoque $A = a, B = \frac{a}{z}, C = \frac{a}{2z^2}$
 $D = \frac{a}{2.3z^3}$, & exinde

$$x = a + \frac{a}{z} z + \frac{a}{2z^2} z^2 + \frac{a}{2.3z^3} z^3 \quad Q. E. I.$$

Hæc æquatio convenit accurate cum ipsis terminis datis $a, b, c,$
 d , & quam proximè cum intermediis & ulterioribus. Sed quo
 plures termini dentur, constat eo propius accessuram hanc æquatio-
 nem ad valores omnium terminorum, tum intermediorum, tum &
 ulteriorum. Quare si series terminorum datorum continuetur in
 infinitum, æquatio tandem coincidet accuratè cum valoribus termi-
 norum omnium, cum intermediorum, tum ulteriorum. Proinde si
 detur

detur lex formandi terminos æquidistantes in serie aliquâ, per hanc propositionem dabitur series infinita exprimens valores omnium terminorum intermediorum etiam & ulteriorum totius seriei.

E X E M P L U M.

Sit hujus rei exemplum in serie terminorum, ubi termini æquidistantes semper sunt in ratione continuâ Geometricâ. In hac serie sint a & $a + ab$ termini duo ad distantiam z ; tum ex natura hujus progressionis erunt omnes termini ad eandem distantiam a , $a + ab$, $a \times \overline{1 + b}^2$, $a \times \overline{1 + b}^3$, &c. & differentiæ primæ hujusmodi terminorum erunt ab , $ab \times \overline{1 + b}$, $ab \times \overline{1 + b}^2$, &c. differentiæ secundæ erunt ab^2 , $ab^2 \times \overline{1 + b}$, $ab^2 \times \overline{1 + b}^2$, &c. differentiæ tertiæ erunt ab^3 , $ab^3 \times \overline{1 + b}$, $ab^3 \times \overline{1 + b}^2$, &c. & sic porro. Unde ad mentem hujus Propositionis erunt $a = a$, $a = ab$, $a = ab^2$, $a = ab^3$, &c. adeoque si z

fit distantia alicujus termini x a termino a erit $x = a + \frac{abz}{1z} +$

$$\frac{ab^2zz}{1.2z^2} + \frac{ab^3zzz}{1.2.3z^3} + \&c. \text{ vel } \frac{x}{a} = 1 + \frac{bz}{1z} + \frac{b^2zz}{1.2z^2} + \frac{b^3zzz}{1.2.3z^3}$$

+ &c. Sed in hoc casu est $\frac{x}{a} = \overline{1 + b}^{\frac{z}{1z}}$, unde fit $\overline{1 + b}^{\frac{z}{1z}} = 1 +$

$$\frac{bz}{1z} + \frac{b^2zz}{1.2z^2} + \frac{b^3zzz}{1.2.3z^3} + \&c. \text{ Coincidit hæc series cum Theo-}$$

remate *Newtoniano* pro inventionem dignitatis Binomii.

Quod Theorema etiam investigari potest ad hunc modum.

$$\text{Sit } \overline{a + b}^n = a^n + xba^{n-1} + v b^2 a^{n-2} + z b^3 a^{n-3} + \&c. \quad \text{Tum} \\ \text{P} \quad \text{ductâ}$$

ductâ serie in $a + b$ erit $\overline{a+b}^{n+1}$, vel juxta notationem nostram $\overline{a+b}^n$ æquale.

$$\begin{array}{ccccccc} a^n & + & xba^{n-1} & + & vb^2a^{n-2} & + & zb^3a^{n-3} & + & \&c. \\ +1 & & +x & & +v & & & & \end{array}$$

Unde existente $n=1$,

per Methodum Incrementorum erit $x=1$, adeoque $x = \frac{n}{1}$;

$$v = x (= n,) \text{ adeoque } v = \frac{n \cdot n}{1 \cdot 2}; \quad z = v (= \frac{n \cdot n}{1 \cdot 2}) \text{ adeoque } z =$$

$$\frac{n \cdot n \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3}; \quad \& \text{ sic porro; (ubi sumuntur omnes integrales purè, quo-$$

niam debent omnes evanescere ubi est $n=0$,) unde fit

$$\overline{a+b}^n = a^n + \frac{n}{1} ba^{n-1} + \frac{n \cdot n}{1 \cdot 2} b^2 a^{n-2} + \frac{n \cdot n \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3} b^3 a^{n-3} + \&c.$$

$$\text{hoc est } \overline{a+b}^n = a^n + \frac{n}{1} \frac{b}{a} A + \frac{n-1}{2} \frac{b}{a} B + \frac{n-2}{3} \frac{b}{a} C$$

+ &c. nempe pro singulis terminis seriei cum propriis signis scriptis A, B, C, &c.

PROP. XIV. PROB. IX.

Datâ ratione formandi terminos in serie quantitatum, invenire aggregatum terminorum quotvis æquedistantium.

Si fit x summa quæsitâ, eadem aucta termino amplius uno erit $x + x$. Quare datâ lege formandi terminos si fiat x æqualis termino proxime addendo, dabitur integralis x in terminis generalibus, per
Prop.

Prop. 10. Quæ ut fiat æqualis summæ quæsitæ, demendus est valor ejusdem integralis, qui prodit quando debet summa quæsitæ esse nihil.

E X E M P. I.

Sit exemplum in serie terminorum æquedistantium, $a, a + b, a + 2b, a + 3b, \&c.$ In hac serie pro termino ultimo semper scripto z , erit $z = b$, atque terminus summæ quæsitæ proxime addendus erit $z + z$, vel z ; adeoque erit $x = z$. Unde regredi-

endo ad integrales erit $x = \frac{z z}{2 z} + A$. Debet autem hæc summa

æquari nihilo, quando terminus proxime addendus est a , hoc est, quando est $z = a$, adeoque $\& z = a - z$; adeoque a summa

$\frac{z z}{2 z} + A$, ablata summa $\frac{\overline{a - z} \times a}{2 z} + A$, residuum $\frac{z z - \overline{a - z} \times a}{2 z}$

erit summa quæsitæ, hoc est, (pro z restituto b)

$$x = \frac{z \times \overline{z + b} - \overline{a - b} \times a}{2 b}.$$

E X E M P. II.

Ad eundem modum si terminus ultimus sit $z z$, atque terminus primus is sit in quo est $z = a$, hoc est $a \times \overline{a + z}$, termino post ultimum proxime addendo existente $z z$, erit $x = z z$; adeoque

$$x = \frac{z z z}{3 z} - \frac{\overline{a - z} \times a \times \overline{a + z}}{3 z}$$

Et ad eundem modum pergere licet ad summationes terminorum, in quibus sunt plures factores $z \times z \times z \times \&c.$

E X E M P.

E X E M P. III.

Inveniendum fit aggregatum terminorum, quorum ultimus semper est $\frac{1}{z z}$, & quorum primus is est in quo est $z = a$. In hoc casu

terminus summæ quæsitæ proxime addendus est $\frac{1}{z z}$. Quare factò

$$x = \frac{1}{z z}, \text{ deinde regrediendo ad integrales erit } x = A - \frac{1}{z z}.$$

Sed ubi terminus proxime addendus est $\frac{1}{a \times a + z}$, hoc est, ubi est

$$z = a, \text{ debet summa quæsitæ æquari nihilo; unde fit } A = \frac{1}{z a}$$

$$\text{adeoque } x = \frac{1}{z a} - \frac{1}{z z}.$$

C O R O L L A R I U M.

Et hinc datur summa omnium terminorum $\frac{1}{a \cdot a + z} + \frac{1}{a + z \cdot a + 2z}$
 $+ \frac{1}{a + 2z \cdot a + 3z} + \&c.$ in infinitum. Nam in hac serie in infinitum continuata in termino ultimo est divisor z infinitus. Proinde evanescente termino $\frac{1}{z z}$ in valore x fit $x = \frac{1}{z a}$.

Et ad eundem modum pergere licet ad summas terminorum in quibus sunt plures divisores $z, z, z, \&c.$

P R O P.

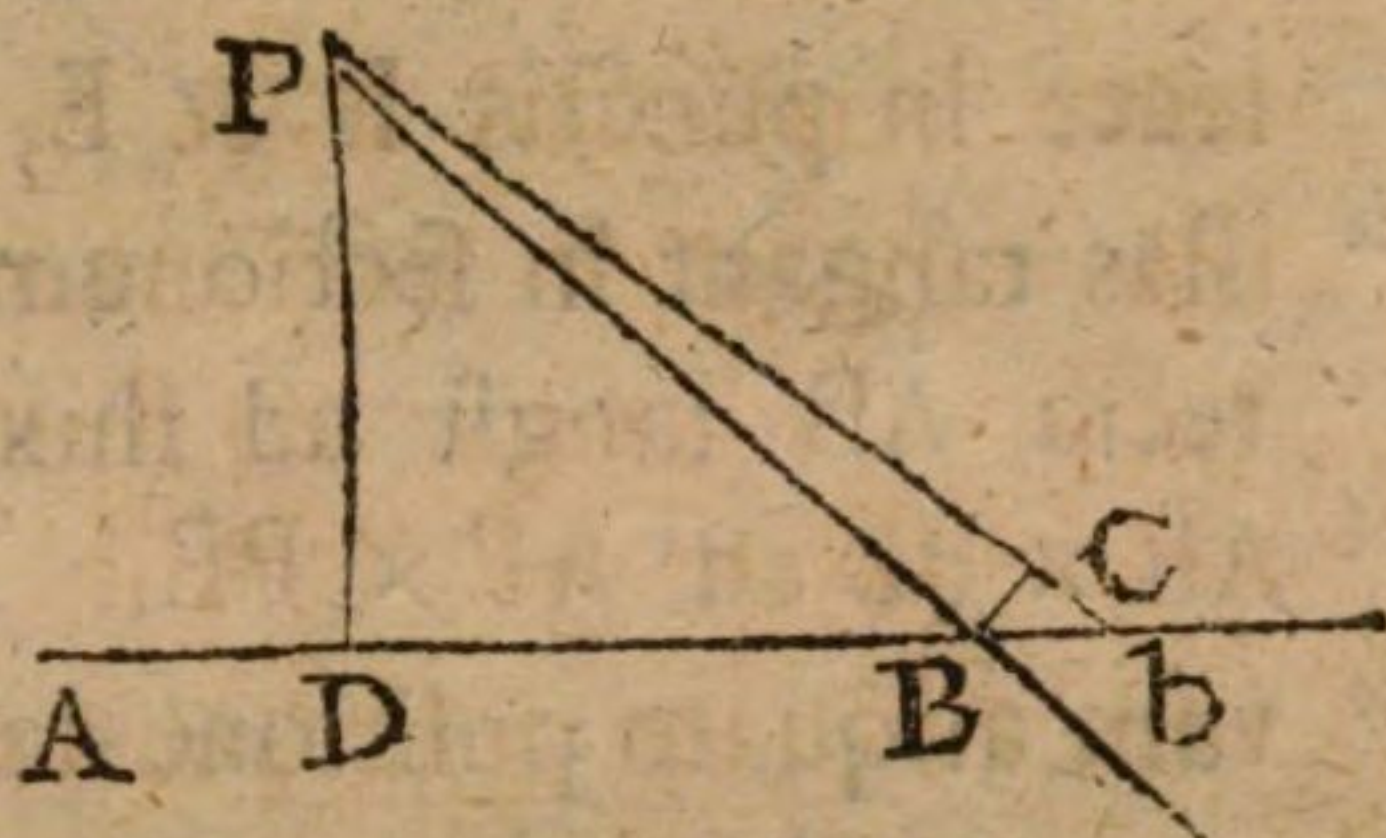
PROP. XV. PROB. X.

Invenire Fluxiones in datis Figuris Geometricis.

Hoc quomodo fit faciendum exemplis melius, quam præceptis patebit.

EXEMP. I.

Sit ergò primum exemplum in figura APB, ubi datis positione rectâ AB, & puncto P, quæritur ratio fluxionum rectæ AB, & distantia PB.

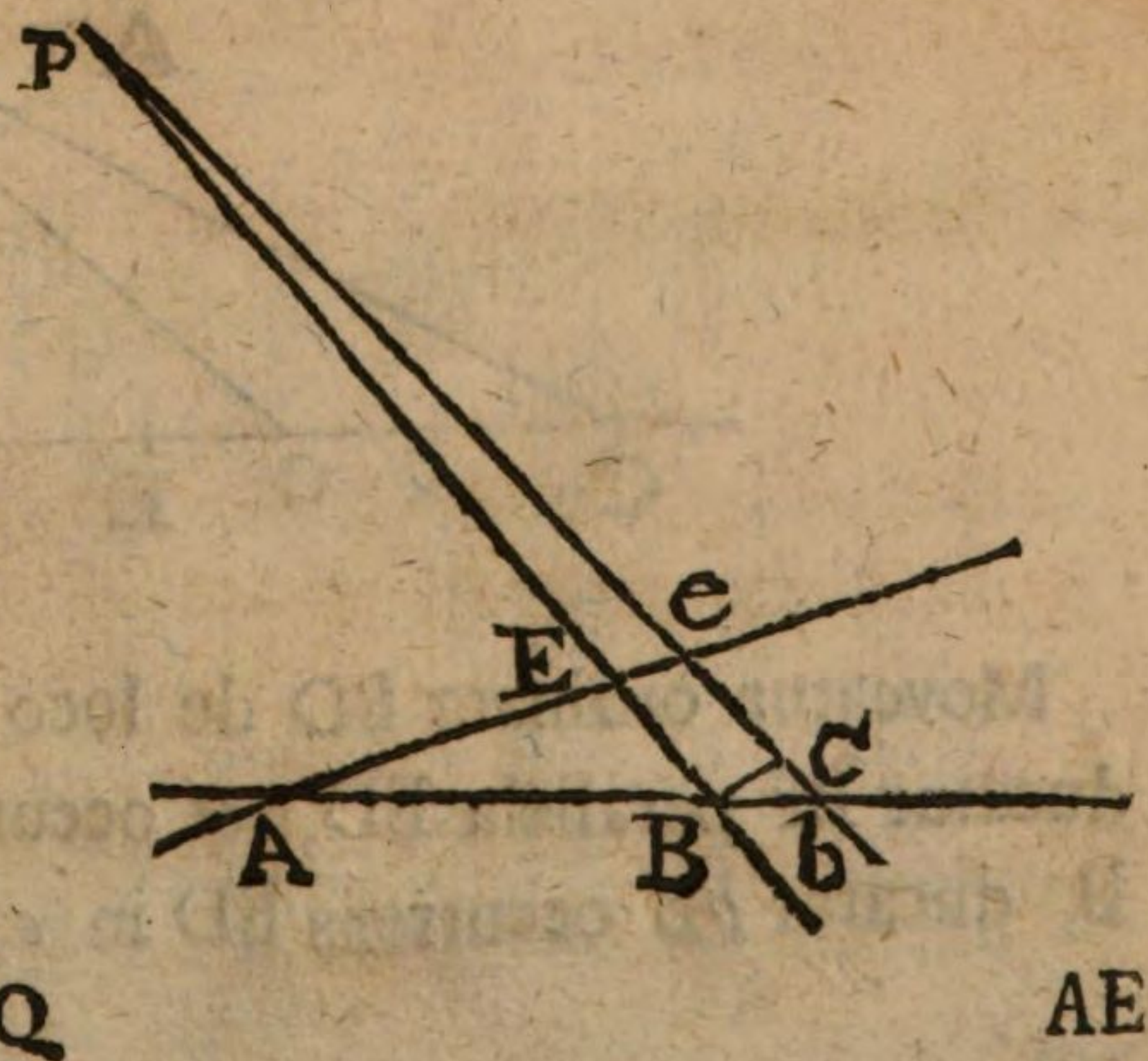


“ Progrediatur recta PB de loco
 “ suo PB in locum novum Pb. In
 “ Pb capiatur PC = PB, & ad AB
 “ ducatur PD sic, ut angulus bPD æqualis fit angulo bBC; & ob
 “ similitudinem triangulorum bBC, bPD, erit augmentum Bb ad
 “ augmentum Cb, ut Pb ad Db. Redeat jam Pb in locum suum
 “ priorem PB, ut augmenta illa evanescant, & evanescantium ratio
 “ ultima, id est ratio ultima Pb ad Db, ea erit quæ est PB ad DB,
 “ existente angulo PDB recto, & propterea in hac ratione est fluxio
 “ ipsius AB ad fluxionem ipsius PB.

EXEMP. II.

“ Recta PB circa datum po-
 “ lum P revolvens secet alias
 “ duas positione datas rectas
 “ AB & AE in B & E: quæ-
 “ ritur proportio fluxionum
 “ rectarum illarum AB & AE.

“ Progrediatur recta revol-
 “ vens PB de loco suo PB in
 “ locum novum Pb rectas AB



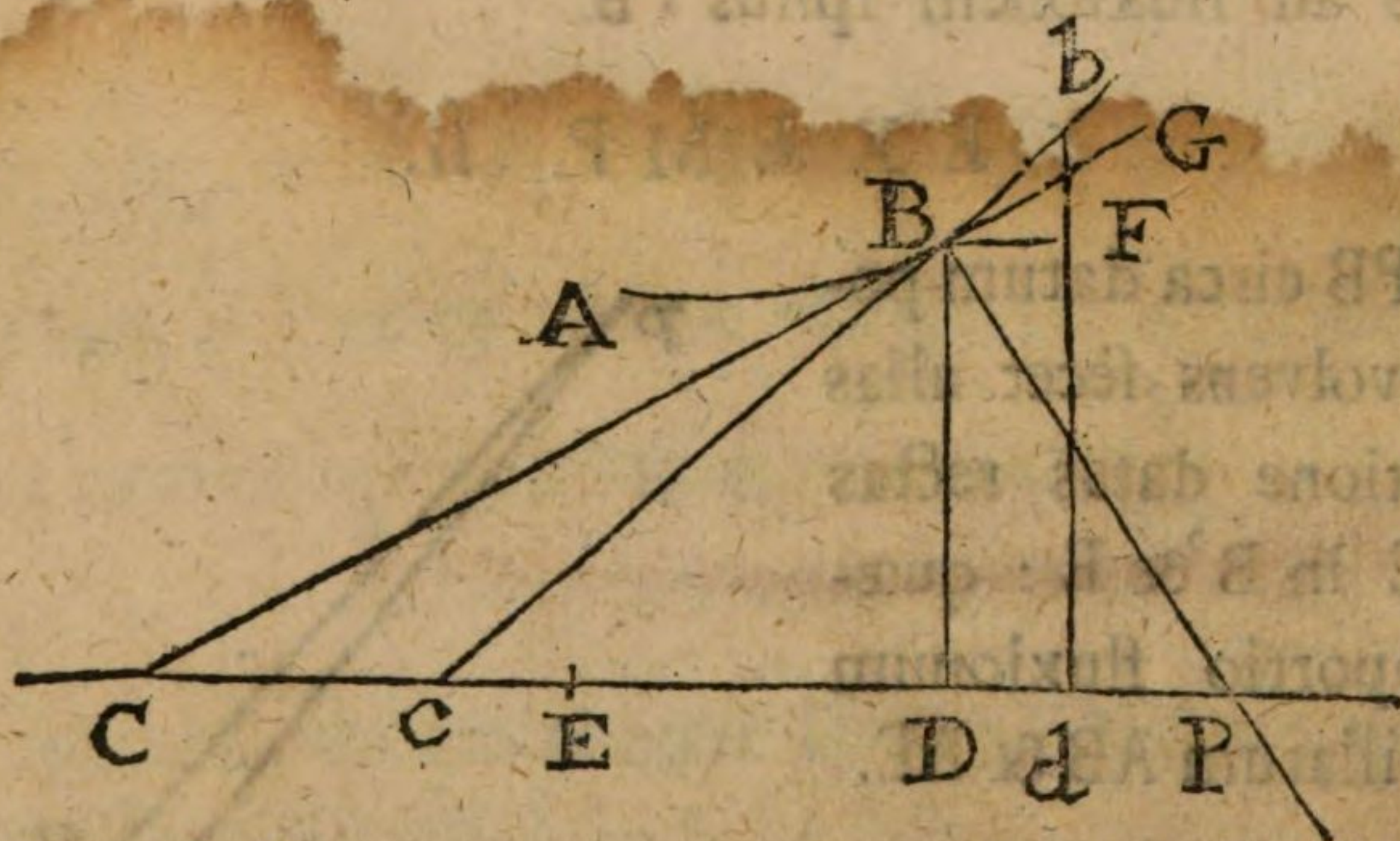
“ AE in punctis *b* & *e* secantem, & rectæ AE parallela BC ducatur
 “ ipsi Pb occurrens in C, & erit Bb ad BC ut Ab ad Ae, & BC ad
 “ Ee ut PB ad PE, & conjunctis rationibus Bb ad Ee ut $Ab \times PB$
 “ ad $Ae \times PE$. Redeat jam linea Pb in locum suum priorem PB,
 “ & augmentum evanescens Bb erit ad augmentum evanescens Ee
 “ ut $AB \times PB$ ad $AE \times PE$, ideoque in hac ratione est fluxio rectæ
 “ AB ad fluxionem rectæ AE.

“ Hinc si recta revolvens PB lineas qualvis curvas positione datas
 “ secet in punctis B & E, & rectæ jam mobiles AB, AE curvas
 “ illas tangant in sectionum punctis B & E; erit fluxio curvæ quam
 “ recta AB tangit ad fluxionem curvæ quam recta AE tangit ut
 “ $AB \times PB$ ad $AE \times PE$. Id quod etiam eveniet si recta PB cur-
 “ vam aliquam positione datam perpetuo tangat in puncto mobili P.

Petuntur hæc duo exempla ex *Newtonianis*.

EXEMP. III.

Sit AB curva quævis positione data, & ab ejus puncto quovis B ducatur recta BD secans rectam positione datam ED in angulo dato in D; quæritur proportio fluxionum, abscissæ ED, ordinatæ DB, & curvæ AB.



Moveatur ordinata BD de loco suo BD in locum novum $b\bar{d}$, & ducatur BF parallela ED , & occurrens $b\bar{d}$ in F , & per puncta b & B , ducatur $b\bar{B}$ occurrens ED in c , & ad punctum B ducatur tangens

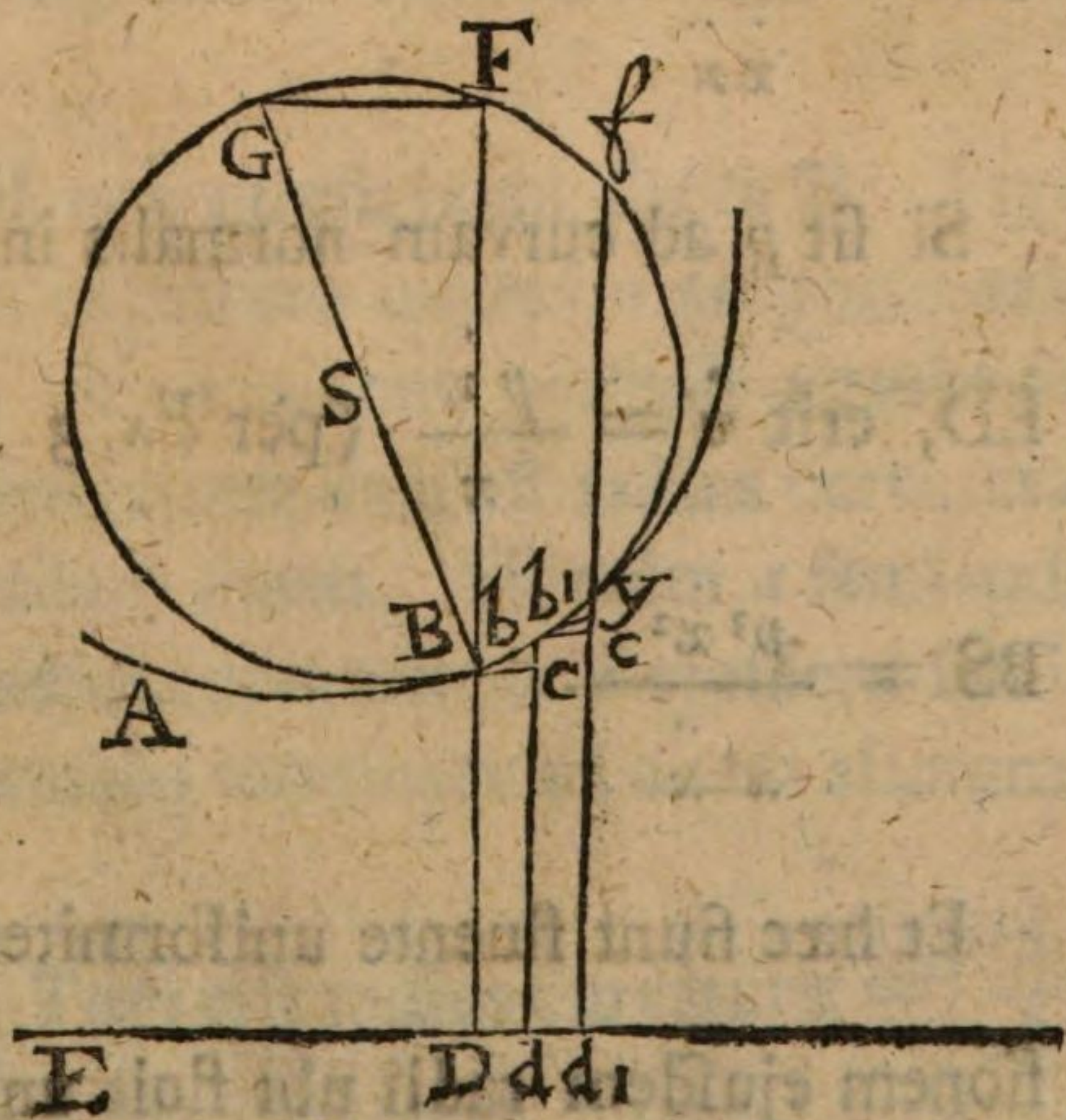
gens occurrens ED, db in C & G. Tum ob similia triangula BFb, cDB, erit $BF : Fb : Bb :: cD : DB : cB$. Redeat jam ordinata bd in locum suum priorem BD, & rectâ cB jam coincidente cum tangente CB, erunt augmenta nascentia abscissæ ED, ordinatæ DB, & ipsius curvæ AB inter se, ut latera trianguli nascentis BFG, vel ei similis trianguli CDB; ideoque in hac ratione erunt fluxiones rectarum ED, DB, & curvæ AB. Et si angulus BDE sit rectus, ductâ ad curvam normali BP occurrente ED in P, ob similia triangula BFG, BDP, erunt eadem fluxiones inter se ut latera trianguli BDP.

Hinc datâ ratione ducendi tangentes ad curvam aliquam propositam, dabitur proportio fluxionum abscissæ, ordinatæ, & ipsius curvæ; atque vicissim ex datâ proportionem fluxionum abscissæ & ordinatæ, dabitur proportio inter subtangentem CD, ordinatam DB, & ipsam tangentem CB; ut & proportio inter ordinatam BD, subnormalem DP, & normalem BP. Datâ autem æquatione definiente relationem inter abscissam ED, & ordinatam DB, datur proportio fluxionum (per *Prop. 1.*) Quare per istam propositionem duci possunt tangentes & normales ad omnes curvas.

E X E M P. IV.

Sit curva quævis AB, & propositum sit invenire radium curvaturæ in puncto B, hoc est, radium circuli cujus curvatura eadem sit, quæ curvæ AB in puncto B.

Duc ordinatas tres æquidistantes BD, bd , $b_1 d_1$, secantes rectam positione datam ED ad angulos rectos in D, d , d_1 , & ipsi ED parallelas duc BC, bc , occurrentes bd , $b_1 d_1$, in C



& c , & duc Bb occurrentem $b_1 d_1$ in y , & per puncta tria B, b, b_1 , transeat circulus cujus centrum fit S , occurrens DB & $d_1 b_1$ in F & f , & duc diametrum BG , atque FG . Sint autem abscissa $ED = z$, ordinata $DB = x$, & curva $AB = v$. Tum juxta Methodum Incrementorum erit $Dd = z$ ($= dd_1 = BC = bc$), $Cb = x$ ($= cy$), & $yb_1 = x$. Sit etiam $Bb = (by =) u$. Tum ex natura circuli erit

$$yb_1 \times yf = yB \times yb, \text{ hoc est } yf = \frac{2uu}{x}. \text{ Sed coincidentibus pun-}$$

ctis B, b, b_1 , erit arcus evanescens Bbb_1 circulo & curvæ AB communis, ideoque in hoc casu erit circulus centro S descriptus curvæ AB æquicurvus in B . Evanescant itaque incrementa, & jam coin-

$$cidente yf cum ipso BF , & facto $\frac{uu}{x} = \frac{v \dot{v}}{x}$, erit $BF = \frac{2v\dot{v}}{x}$$$

Sed coincidentibus punctis B & b , est BF ad BG , ut BC ad Bb ,

$$\text{hoc est, ut } z \text{ ad } \dot{v}. \text{ Unde fit } BG = \frac{2v^3}{z \ddot{x}}, \text{ & radius curvaturæ}$$

$$BS = \frac{\dot{v}^3}{z \ddot{x}}.$$

Si fit p ad curvam normalis intercepta inter punctum B & axem

$$ED, \text{ erit } \dot{v} = \frac{p \dot{z}}{x} \text{ (per Ex. 3.) Unde fit etiam radius curvaturæ}$$

$$BS = \frac{p^3 \dot{z}^2}{x^3 \ddot{x}}.$$

Et hæc fiunt fluente uniformiter z . Sed si cupis invenire expressionem ejusdem radii ubi fluit uniformiter v , per æquationem $\dot{v}\dot{v} = x\ddot{x} +$

$\ddot{x}x + \ddot{z}z$ (adhuc fluente uniformiter z) fiet $2\dot{v}\ddot{v} = 2\dot{x}\ddot{x}$, hoc est

$$\ddot{x} = \frac{\dot{v}\ddot{v}}{\dot{x}}, \text{ \& inde } BS = \frac{\dot{v}^2\ddot{x}}{\dot{v}\ddot{z}}. \text{ Jam ut fluat uniformiter } v,$$

pro $\ddot{v}$ scribe $-\frac{\ddot{z}\dot{v}}{\dot{z}}$, vel neglecto signo quod solum indicat ipsum

z decrescere crescente ED , quando curva est versùs axem convexa,

ut in hoc schemate exhibetur,) $BS = \frac{\dot{v}\ddot{x}}{\ddot{z}}.$

Sit hujus rei exemplum in quavis sectione conica, existente $ax^2 = dz^2 - da^2$; ubi est d semi-parameter ad semi-axem a , in quo sumitur abscissa z . Tum fluente uniformiter z , erit $2ax\dot{x} = 2dz\dot{z}$, adeoque $\dot{x} = \frac{dz\dot{z}}{ax}$: atque iterum capiendo fluxiones

$$\ddot{x} = \left(\frac{dz\dot{z}ax - axdz\dot{z}}{a^2x^2} = \frac{da^2x^2\dot{z}^2 - d^2ax^2\dot{z}^2}{a^3x^3} = \right) -\frac{d^2\dot{z}^2}{x^3}. \text{ Unde fit}$$

$$BS = \left(\frac{p^3\dot{z}^2}{x^3\ddot{x}} = \right) -\frac{p^3}{d^2}; \text{ ubi signum } - \text{ tantum indicat centrum}$$

S cadere infra punctum B , quod nos quæсивimus supra B . Ergò in omni sectione conicâ est radius curvaturæ quantum proportionale semiparametro ad utrumvis axem, & ad curvam normali terminatæ ad eundem axem. Quare ad extremitatem axis est radius curvaturæ æqualis ipsi semiparametro ad eundem axem. Sit enim a semi-axis ad cujus extremitatem quæritur radius curvaturæ, & d ejusdem semi-parameter; & sit p ad curvam normalis terminata ad axem alterum,

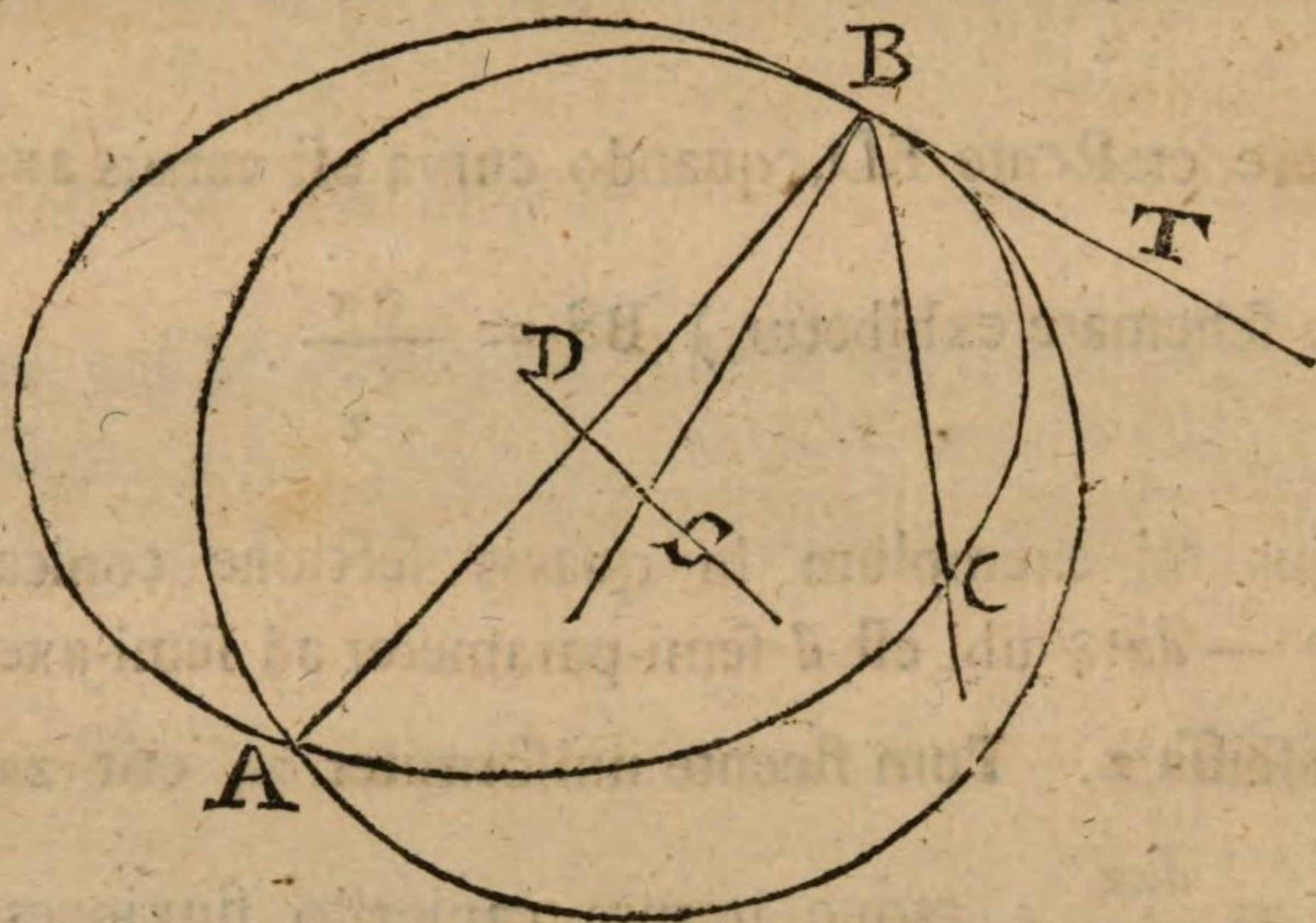
$$\left(\text{cujus semiparameter est } \frac{a^{\frac{3}{2}}}{d^{\frac{1}{2}}} \right) \text{ Tum erit radius curvaturæ } = \frac{p^3d}{a^3}.$$

R

Sed

Sed in vertice diametri a est $p = a$; quare in hoc casu est radius curvaturæ d . Hanc autem expressionem radii curvaturæ in confectionibus primus invenit clarissimus *Newtonus*.

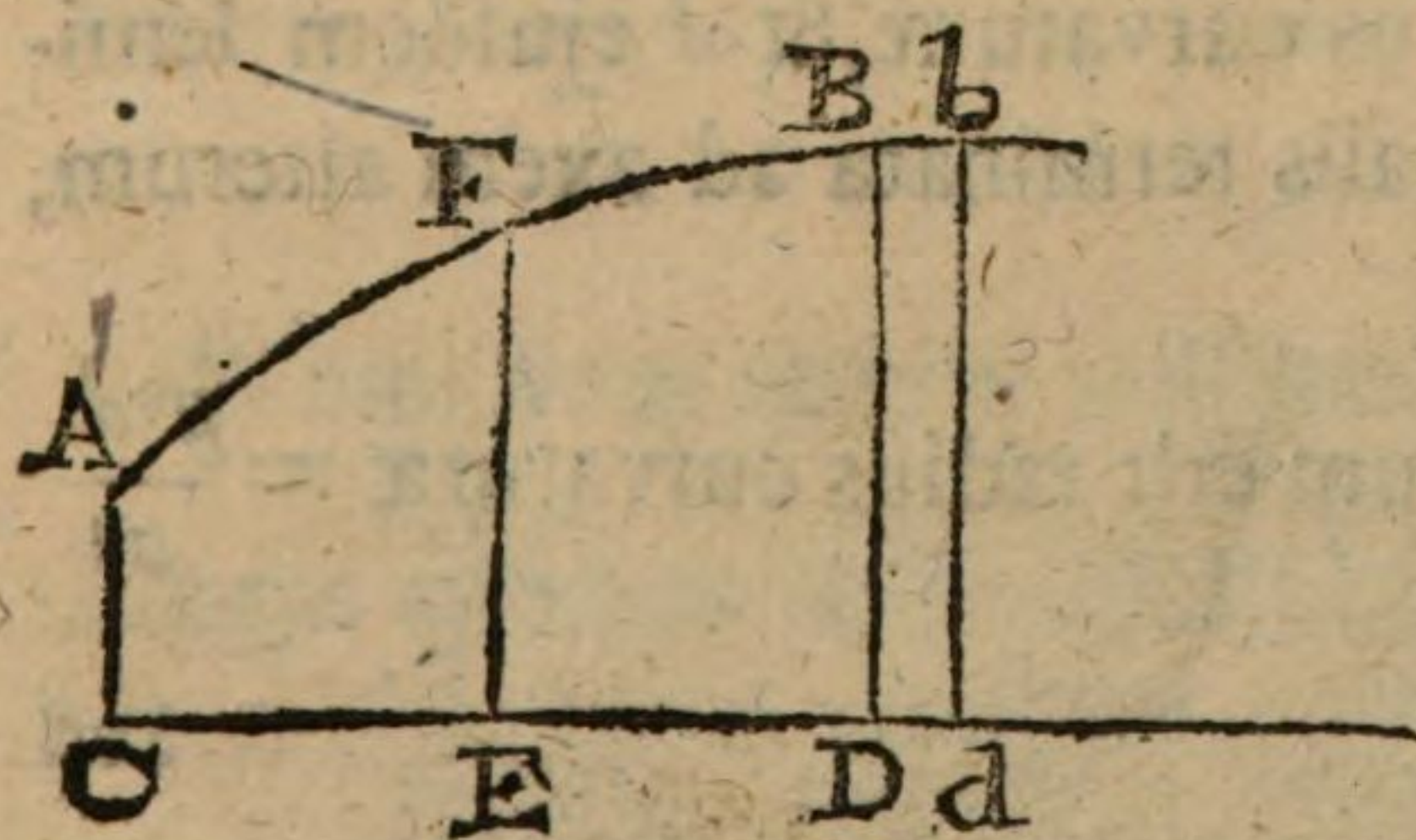
Cæterum descriptâ jam sectione conicâ, potest idem radius determinari Geometricè per constructionem sequentem.



Sit ABC data sectio conica, & quærat^r radius curvaturæ ad punctum B. Duc tangentem BT, eique perpendicularem BS, & ducatur BC parallela alterutri axium, atque fiat angulus CBA æqualis angulo CBT, & occurrat BA confectioni in A. Tum bisectâ AB in D, & erectâ perpendiculari DS occurrente BS in S, erit S centrum circuli osculatorii. Hujus demonstratio est perfacilis.

PROP. XVI. PROB. XI.

Curvas omnes quadrare.



Sit AB curva quadranda, cujus abscissa est CD, & ordinata DB. Moveatur ordinata de loco suo BD in locum novum bd , atq; spatium $BDdb$ erit augmentum areae respondens abscissæ augmento.

augmento Dd . Redeat ordinata bd in locum suum priorem BD ,
atque erit ultimò spatium $BDdb$ æquale $BD \times Dd$; quare si ab-
scissa CD sit z , & ordinata BD dicatur y , erit fluxio areæ æqualis zy .

Inventâ itaque fluente ipsius zy (per *Prop. 10.*) si dematur fluens
proveniens per abscissam CE a fluente proveniente per abscissam
 CD , vel si invariabilis incognita in expressione fluentis determinetur
faciendo fluentem proveniente per abscissam CE æqualem nihilo,
dabitur area $FEDB$ descripta per motum ordinatæ de EF in DB .

E X E M P. I.

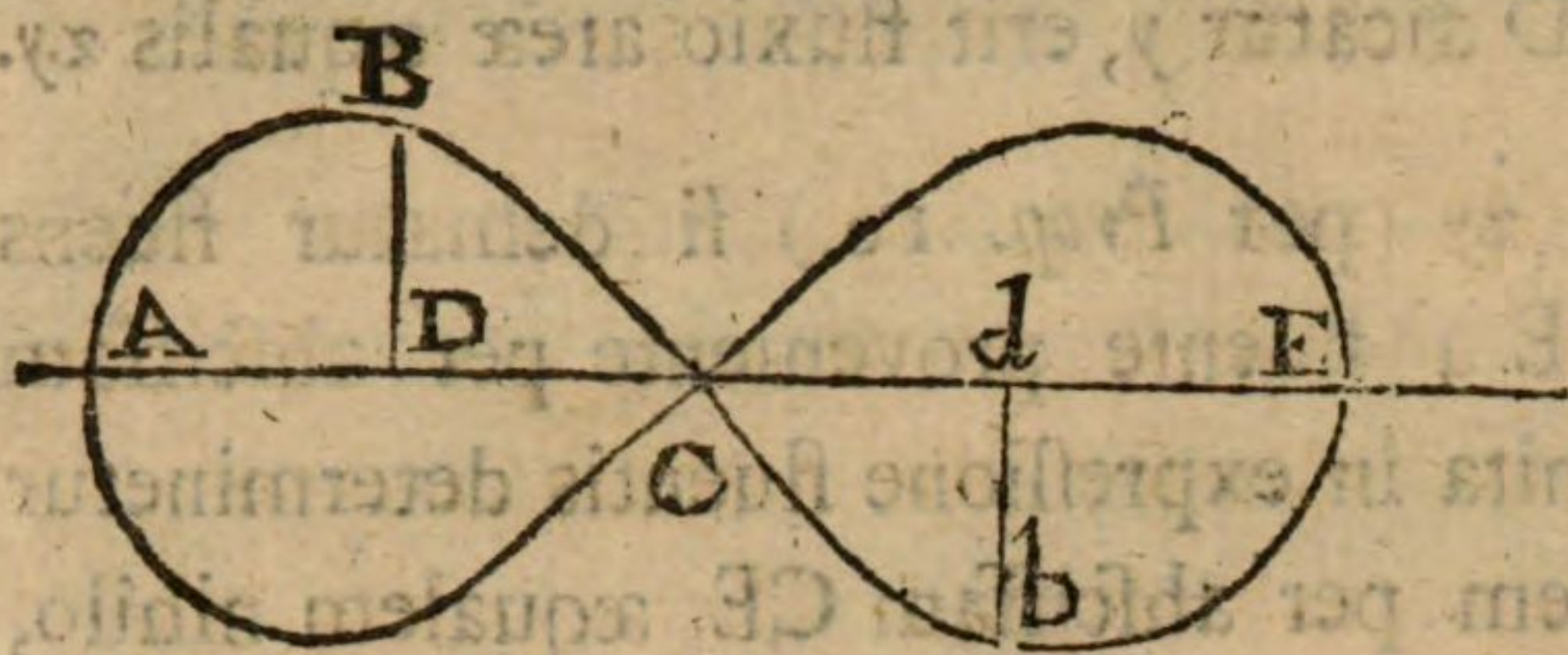
Sit abscissa ad datum punctum C terminata $CD = z$, & ordinata
 $DB = y$, atque sumptâ aliquâ lineâ pro unitate sit $y = z^{n-1}$. Tum
erit fluxio areæ æqualis zz^{n-1} , cujus fluens est $\frac{z^n}{n} + A$. Sit data
aliqua abscissa $CE = a$, tum demptâ fluente $\frac{a^n}{n} + A$ a fluente $\frac{z^n}{n}$
 $+ A$, (vel factò $\frac{a^n}{n} + A = 0$, unde fiat $A = -\frac{a^n}{n}$) erit $\frac{z^n}{n} -$
 $\frac{a^n}{n}$ æquale areæ adjacenti ad abscissam ED .

Ubi est n numerus negativus, ut sit $y = z^{-n-1}$, erit area $EFBD$
 $= \frac{z^{-n}}{-n} - \frac{a^{-n}}{-n}$, hoc est $\frac{1}{na^n} - \frac{1}{nz^n}$. Si jam fiat abscissa z
infinita, evanescente termino $\frac{1}{nz^n}$ fiet area $EFBD$ adjacens abscissæ

ultra ordinatam EF in infinitum productæ æqualis $\frac{1}{na^n}$. Et sem-
per ubi fluentis signum contrarium est signo fluxionis, area per
fluentem expressa adjacet abscissæ ultra ordinatam productæ. Nam
contrarietas signorum monstrat fluentem minui dum augetur abscissa,
& vice versâ.

E X E M P.

E X E M P. II.



Sit curva quadranda ABCb, cujus abscissâ AD existente z , ejus ordinatim applicata DB est $\sqrt{1-z} \times \sqrt{2z-z^2}^{\frac{1}{2}}$. Fluxio areae in

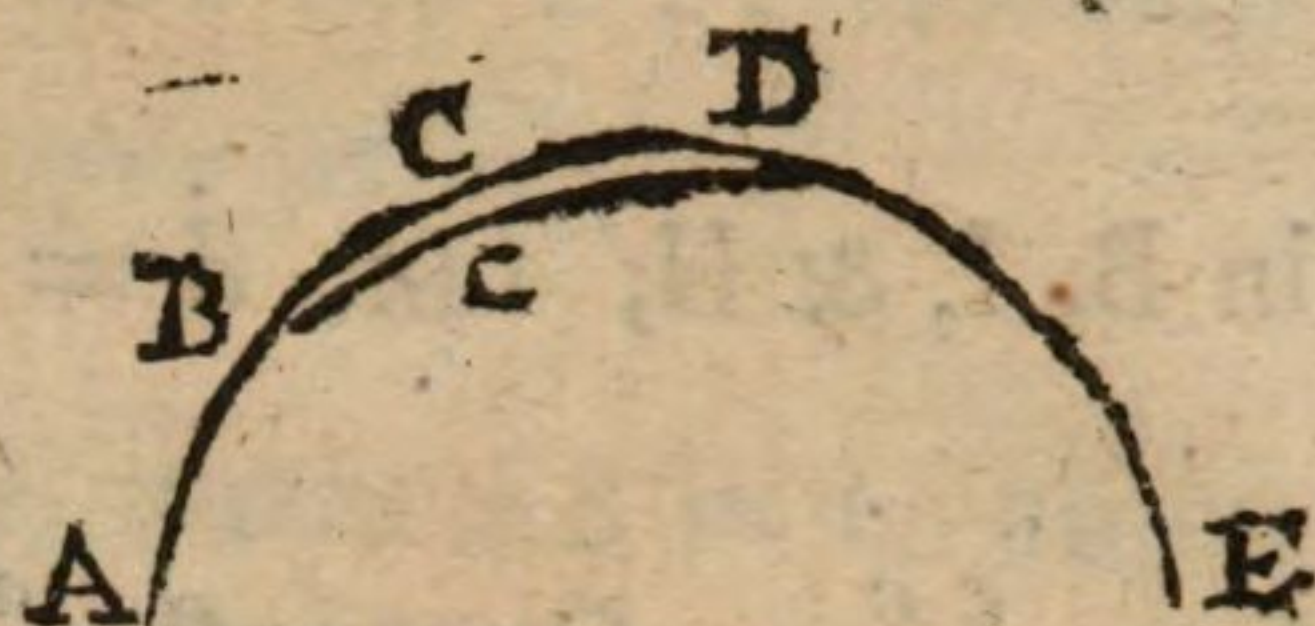
hac curva est $z \times \sqrt{1-z} \times \sqrt{2z-z^2}^{\frac{1}{2}}$. Cujus fluens, purè sumpta

absque correctione, est $\frac{1}{3} |2z-z^2|^{\frac{3}{2}}$. Est autem hæc fluens æqualis nihilo, vel ubi $z = 0$, vel ubi $z = 2$. Itaque in axe AD sumpto AE = 2, terminatur atea per hanc fluentem expressa, vel ad punctum A vel ad punctum E. Ubi est $z < 1$, (vel AC, existente puncto C medio inter A & E) in primo casu est area ADB, in secundo casu est differentia inter areas CbEC atque CDBC. Sed ubi est $z (= Ad) > 1$, in primo casu est area differentia inter areas ABCA, atque CdbC; in secundo casu est area dbEd.

Positiones hujusmodi arearum colliguntur ex signis expressionum ordinatae, atque areae. Sic in casu præsentis, existente $z < 1$, tam ordinata quam area sunt affirmativæ; quare aucta abscissa z , augetur area quæsitæ; quæ proinde est, vel ABD, vel differentia inter areas CEbC atque CBDC. Sed ubi est $z > 1$, ordinata, atque area signa habent contraria, nam in hoc casu expressio ordinatae $\sqrt{1-z} \times \sqrt{2z-z^2}^{\frac{1}{2}}$ est quantitas negativa, expressione areae $\frac{1}{3} |2z-z^2|^{\frac{3}{2}}$ semper existente affirmativa;) unde crescente abscissa z decrescit area; adeoque exprimitur, vel per differentiam inter areas ABC & CDb, vel per aream dEb. Areae autem dEb signum est affirmativum, quoniam adjacet tam abscissæ dE, quam ordinatæ db negativis.

L E M M A III.

Si lineæ alicujus ABCDE figura talis sit, ut factum aliquod toti lineæ respondens majus sit, vel minus, quam simile factum ubi lineæ aliam induit figuram; etiam lineæ ejusdem

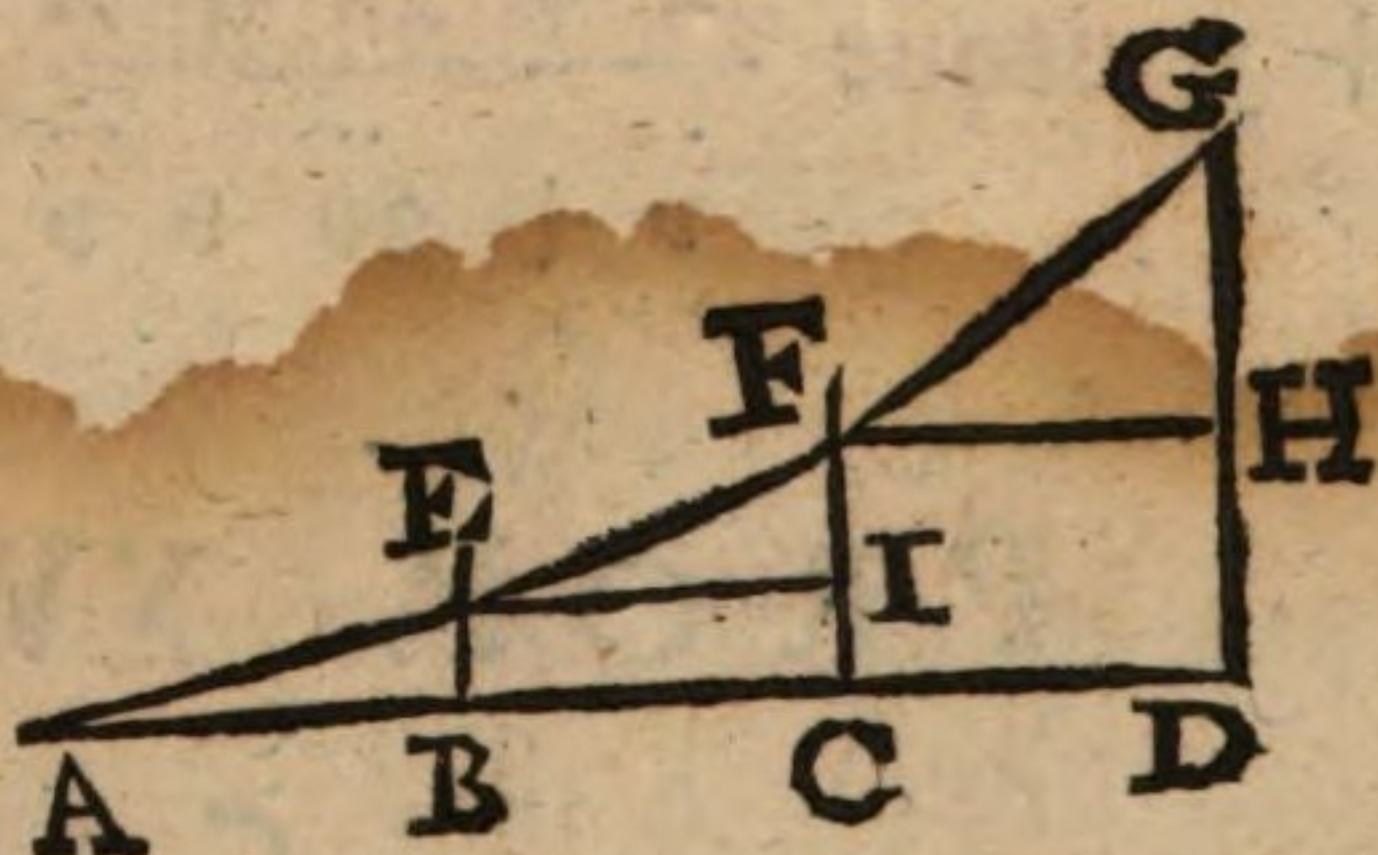


partis cujusvis BCD figura talis erit, ut ei respondens facti pars major sit, vel minor, quam si pars illa BCD aliam quamvis induat figuram BcD.

Nam si facti pars respondens lineæ BcD major sit, vel minor, quam simile factum respondens lineæ BCD; tum conjunctim erit totum factum respondens lineæ ABcDE majus, vel minus, quam simile factum respondens Lineæ ABCDE, contra hypothesin.

L E M M A IV.

In rectâ AB positione datâ sumantur puncta quatuor æquidistantia A, B, C, D, & erigantur normales BE, CF, DG, per quarum terminos E, F, G ducantur rectæ AE, EF, FG, & ducatur FH



parallela ipsi AB occurrens DG in H. Datis punctis A & G, & summa rectarum AE, EF, FG, quæritur ratio fluxionum linearum BE, GH, quando figura tota evanescit & fit AEFG elementum curvæ.

Sunto $BE = a$, $IF = b$, $HG = c$, $AE = d$, $EF = e$, $FG = f$. Tum ob datas summas $a + b + c (= DG)$ & $d + e + f$, capi-

S

endo

endo fluxiones erit $\dot{a} + \dot{b} + \dot{c} = 0$, (hoc est $\dot{b} = -\dot{a} - \dot{c}$;) item $\dot{d} + \dot{e} + \dot{f} = 0$. Sed ob datas AB, EI, FH, & ob angulos rectos

in B, I, & H, sunt $\dot{d} = \frac{a\dot{a}}{d}$, $\dot{e} = \frac{b\dot{b}}{e}$ ($= \frac{-b\dot{a} - b\dot{c}}{e}$;) atq;

$\dot{f} = \frac{c\dot{c}}{f}$. Quare est $\frac{a\dot{a}}{d} - \frac{b\dot{a}}{e} - \frac{b\dot{c}}{e} + \frac{c\dot{c}}{f} = 0$, hoc est

$\dot{c} : \dot{a} :: \frac{b}{e} - \frac{a}{d} : \frac{c}{f} - \frac{b}{e}$. Sed ubi AEFG est elementum

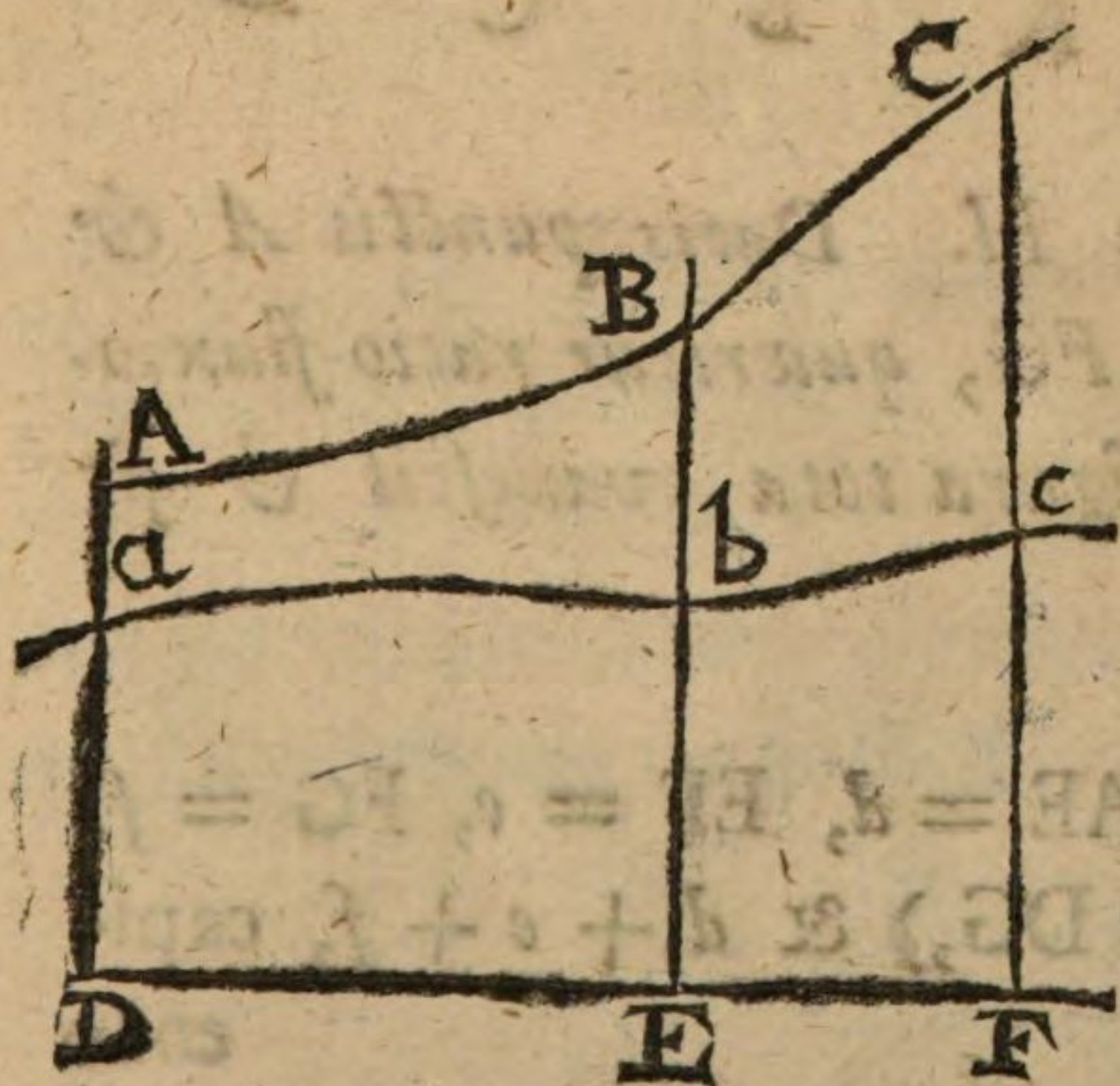
curvæ, si sit ordinata x & curva v , erit $a = \dot{x}$, $b = \dot{x} + \ddot{x}$, $c = \dot{x} + 2\ddot{x} + \ddot{\ddot{x}}$, $d = \dot{v}$, $e = \dot{v} + \ddot{v}$, $f = \dot{v} + 2\ddot{v} + \ddot{\ddot{v}}$; adeoq; $\dot{c} : \dot{a} ::$

$$\frac{\dot{x} + \ddot{x}}{\dot{v} + \ddot{v}} - \frac{\dot{x}}{\dot{v}} : \frac{\dot{x} + 2\ddot{x} + \ddot{\ddot{x}}}{\dot{v} + 2\ddot{v} + \ddot{\ddot{v}}} - \frac{\dot{x} + \ddot{x}}{\dot{v} + \ddot{v}}; \text{ vel si pro } \frac{\dot{x}}{\dot{v}}$$

scribatur y , erit $\dot{c} : \dot{a} :: \dot{y} : \dot{y} + \ddot{y}$. Nam si $\frac{\dot{x}}{\dot{v}} = y$, erit $\frac{\dot{x} + \ddot{x}}{\dot{v} + \ddot{v}} =$

$$y + \dot{y}, \text{ atque } \frac{\dot{x} + 2\ddot{x} + \ddot{\ddot{x}}}{\dot{v} + 2\ddot{v} + \ddot{\ddot{v}}} = y + 2\dot{y} + \ddot{y}.$$

PROP. XVII. PROB. XII.



Detur positione recta DE, & ducta perpendiculari DA, per punctum A transeat curva ABC, cujus ordinata perpendicularis est BE; atque sit abc alia curva, cujus ordinata perpendicularis Eb quovis modo dato componitur ex abscissa communi DE, ordinatâ BE,

BE, & curva AB. Queritur forma curvæ ABC, quando area DabE est omnium arearum per ordinatas bE hoc modo provenientes descriptarum maxima, ex data basi DF, ordinatis DA, FC, & longitudine curvæ interceptæ ABC.

Sit abscissa $DE = z$, ordinata $BE = x$, curva $AB = v$, atque ordinata $Eb = P$. Per *Lem. 3.* eadem proprietas convenit curvæ particulæ cuivis datæ. Sit ergo (vid. fig. *Lem. 4.*) punctum A extremitas ordinatæ BE in præsentî figurâ, atque sit AEFG particula curvæ quæsitæ, & existente P ordinata bE pertinente ad punctum A, sit $\dot{P}$ similis ordinata pertinens ad punctum E, atque $\ddot{P}$ tertia ordinata bE pertinens ad punctum F. Tum areæ DabE particula respondens curvæ particulæ AEFG erit $z\dot{P} + z\dot{P} + z\ddot{P}$, quæ cum debeat esse extrema, ejus fluxio erit nihil (per method. maximorum & minimorum.) Fluxiones autem sunt æstimandæ per motus punctorum tantum E & F sursum & deorsum. Unde existentibus $\ddot{z}$ & $\ddot{P}$ æqualibus nihilo, ob defectum motus punctorum A, B, C, D, erit $z\ddot{P} + z\ddot{P} = 0$, hoc est $\ddot{P} + \ddot{P} = 0$.

Sit in genere $\dot{P} = Q\dot{z} + R\dot{x} + S\dot{v}$. Tum pro Q, R, & S pertinentibus ad puncta E & F scriptis Q, R, S, & $\dot{Q}$, $\dot{R}$, $\dot{S}$; atque pro z, x, v , in valoribus ipsorum $\dot{P}$ & $\ddot{P}$ scriptis motibus punctorum E, B, F, & C, prout designantur in *Lemmate 4.* erit $\dot{P} = R\dot{a} + S\dot{d}$, atque $\ddot{P} = -\dot{R}c - \dot{S}f$, vel pro $\dot{a}$ & $\dot{f}$ scriptis ipsorum valoribus $\frac{a\dot{a}}{d}$ atque $\frac{c\dot{c}}{f}$ $\dot{P} = R\dot{a} + S\frac{a\dot{a}}{d}$, atque $\ddot{P} = -\dot{R}c -$

$\dot{S} \frac{c}{f}$. Unde fit $\dot{c} : \dot{a} :: R + S \frac{a}{d} : \dot{R} + \dot{S} \frac{c}{f}$. Sed (per *Lem.*

4.) est $\dot{c} : \dot{a} :: \dot{y} : \dot{y} + \ddot{y}$. Quare (ut in *Lemmate* isto, pro $\frac{a}{d}$

vel $\frac{\dot{x}}{\dot{v}}$ scripto y , ut fit etiam $\frac{c}{f} = y + 2\dot{y} + \ddot{y}$) erit $R + Sy : \dot{R} +$

$\dot{S} \times y + 2\dot{y} + \ddot{y} :: \dot{y} : \dot{y} + \ddot{y}$. Pro $\dot{R}$ & $\dot{S}$ scribe $R + \dot{R}$ atque $S + \dot{S}$,

atque fiet $R + Sy : R + \dot{R} + Sy + 2\dot{S}y + \ddot{S}y + \dot{S}y + 2\ddot{S}y +$

$\ddot{S}y :: \dot{y} : \dot{y} + \ddot{y}$, atque dividendo $R + Sy : \dot{R} + 2\dot{S}y + \ddot{S}y + \dot{S}y +$

$2\ddot{S}y + \ddot{S}y :: \dot{y} : \ddot{y}$, vel (in primo consequente reiectis evanescentibus

$\ddot{S}y$, $2\dot{S}y$, & $\ddot{S}y$), $R + Sy : \dot{R} + 2\dot{S}y + \dot{S}y :: \dot{y} : \ddot{y}$, hoc est $\dot{R}y - R\ddot{y} +$

$\dot{S}y\dot{y} + 2\dot{S}y\ddot{y} - Sy\ddot{y} = 0$. Est hæc æquatio fluxionalis irreducibilis ;

quare pro y , $\dot{y}$, $\ddot{y}$, scriptis eorum valoribus per $\dot{x}$, $\ddot{x}$, $\ddot{\ddot{x}}$, & $\dot{v}$, $\ddot{v}$, $\ddot{\ddot{v}}$ ex-

pressis fiet $\dot{R}\ddot{\ddot{x}}\ddot{\ddot{v}}^2 - R\ddot{\ddot{x}}\ddot{\ddot{v}}^2 + 3R\ddot{\ddot{x}}\ddot{\ddot{v}}\ddot{\ddot{v}} + \dot{S}\ddot{\ddot{x}}\ddot{\ddot{v}} + 2\dot{S}\ddot{\ddot{x}}^2\ddot{\ddot{v}} - \dot{S}\ddot{\ddot{x}}\ddot{\ddot{v}} +$

$\dot{S}\ddot{\ddot{x}}\ddot{\ddot{v}} = 0$. Et ope hujus æquationis, una cum æquatione $\ddot{\ddot{v}} = \ddot{\ddot{x}} +$

$\ddot{\ddot{x}}$, (nempe pro R , $\dot{R}$, S , & $\dot{S}$, scriptis eorum valoribus per z , x , v , & eorum fluxiones expressis) dabuntur fluentes x , & v (per *Prop.* 6.)

In resolutione autem harum æquationum erunt quatuor coefficientes indeterminati, (per *Prop.* 5.) quorum duo determinantur faciendo $v = 0$, & $x = AD$ ad punctum D , atque reliqui duo determinantur faciendo $v =$ datae longitudini ABC , & $x = FC$ ad punctum C .

C O R O L L. I.

Si curva v non ingreditur valorem ordinatæ P , existente $S = 0$, erit $\dot{R}y - R\ddot{y} = 0$. Qua æquatione comparata cum fluxione $n : 2$.
Schol.

Schol. Prop. 6. invenietur $\frac{R}{y} = \frac{a}{z}$. Ubi pro y scripto ipsius va-

lore $\frac{\dot{z}^2 \ddot{x}}{\dot{v}^3}$, fiet $R \frac{\dot{v}^3}{\dot{z} \ddot{x}} = a$. Sed est $\frac{\dot{v}^3}{\dot{z} \ddot{x}}$ æquale radio curva-
turæ (per *Prop. 15. Ex. 4.*) quare in hoc casu est radius curvaturæ
æqualis $\frac{a}{R}$.

C O R O L L. II.

Iisdem positis, si in expressione ordinatæ P desit etiam z , erit
 $R\dot{x} = \dot{P}$, quo pacto fiet $\frac{\dot{P}\dot{v}^3}{\dot{z}\ddot{x}} = a$. Vice $\dot{x}$ scribe ipsius valorem
 $\dot{v}$, atque hinc fiet $\dot{P} = \dot{z}a\dot{v}\dot{v}^{-2}$. Unde capiendo fluentes erit $P =$
 $b - \frac{az}{\dot{v}}$. Quo pacto in hoc casu revocatur Problema ad fluxio-
nes primas.

Solvi etiam potest per quadraturam curvarum. Nam in valore
ipsius P nulla involvitur variabilis nisi x . Est ergò $az = b\dot{v} - P\dot{v}$,
adeoque $a^2 z^2 = \overline{b - P}^2 \dot{v}^2 = \overline{b - P}^2 \times \overline{z^2 + x^2}$, hoc est

$$\dot{z} \sqrt{\frac{a^2 + 2bP - P^2}{-b^2}} = \overline{b - P} \times \dot{x}, \text{ seu } \dot{z} = \frac{\overline{b - P} \times \dot{x}}{\sqrt{\frac{a^2 + 2bP - P^2}{-b^2}}}.$$

$$\text{Etiam } \dot{v} = \frac{a \dot{x}}{\sqrt{\frac{a^2 + 2bP - P^2}{-b^2}}}.$$

Ergo quadrando curvas quarum

T

abscissa

abscissa communis est x , & ordinatae sunt $\frac{b - P}{\sqrt{a^2 + 2bP - P^2} - b^2}$

& $\frac{a}{\sqrt{a^2 + 2bP - P^2} - b^2}$, dabuntur x & v .

C O R O L L. III.

Si in expressione ordinatae P defit x , existente $R = 0$, erit $\dot{S}y\dot{y} + 2\dot{S}y\ddot{y} - S\ddot{y}\ddot{y} = 0$. Qua aequatione collata cum fluxione $n : 3$. *Schol.*

Prop. 6. invenietur $S \frac{\dot{y}^2}{\dot{y}} = \frac{a}{z}$, hoc est (pro y & $\dot{y}$ scriptis suis

valoribus $\frac{x}{\dot{v}}$ atque $\frac{\dot{x}^2 \ddot{x}}{\dot{v}^3}$) $S \frac{\dot{x}^2}{\dot{v}^2} \times \frac{\dot{v}^3}{\ddot{x}\dot{x}} = a$. Unde in hoc casu

erit radius curvaturae $(= \frac{\dot{v}^3}{\ddot{x}\dot{x}})$ aequalis $\frac{a\dot{v}^2}{S\dot{x}^2}$.

C O R O L L. IV.

Iisdem positis, si praeterea defit x in expressione ipsius P ut fit $\dot{P} = \dot{S}v$,

erit $\frac{\dot{P}\dot{x}^2}{\ddot{x}\dot{x}} = a$, hoc est $\dot{P} = a\ddot{x}\dot{x}^{-2}$. Unde regrediendo ad flu-

entes fit $P = b - \frac{a\dot{x}}{x}$. Adeoque etiam in hoc casu revocatur *Pro-*

blema ad fluxiones primas.

Solvi etiam potest per quadraturam curvarum. Nam in hoc casu in valorem ipsius P nulla ingreditur variabilis nisi v . Ergo est

$$a\dot{x} =$$

$$ax = bx - Px, \text{ adeoque } a^2x^2 = \overline{b - P}^2 \times x^2 = \overline{b - P}^2 \times \overline{v^2 - z^2},$$

$$\text{hoc est } z = \frac{\overline{b - P} \times v}{\sqrt{a^2 + 2bP - P^2} - b^2}. \quad \text{Etiam } x = \frac{av}{\sqrt{a^2 + 2bP - P^2} - b^2}.$$

Itaque quadrando curvas, quarum abscissa communis est v , & ordi-

$$\text{natae sunt } \frac{b - P}{\sqrt{a^2 + 2bP - P^2} - b^2}, \text{ \& } \frac{a}{\sqrt{a^2 + 2bP - P^2} - b^2}, \text{ dabuntur } z$$

& x .

C O R O L L. V.

Et hinc vice versa, data curva ABC, innotescit cujusmodi factum sit extremum in hac curva. Nam si quaeritur ordinata bE quae componatur ex dignitatibus ordinatae BE, dabitur per aequationem $P = b -$

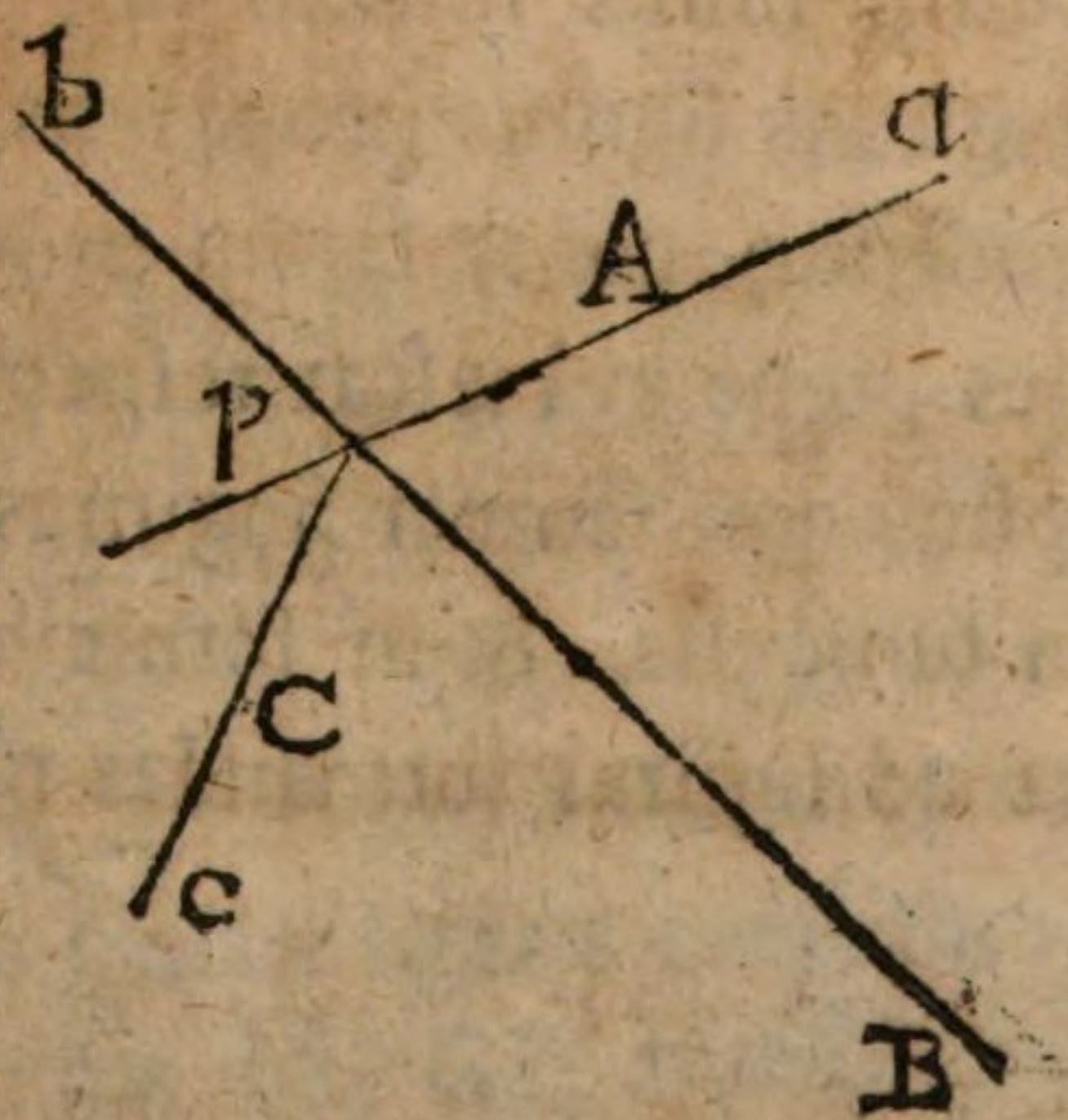
$\frac{az}{v}$, (Cor. 2.) Et si quaeritur ordinata bE quae componatur ex

dignitatibus v , invenietur per aequationem $P = b - \frac{az}{x}$ (Cor. 4.)

L E M M A V.

Si spatium rigidum a tribus potentiis in aequilibrio tenetur, lineae directionum transibunt per idem punctum, & in eodem plano jacebunt.

Applicentur potentiae ad puncta A, B, C, atque agant in directionibus Aa, Eb, Cc. Quoniam punctum quodvis



A tenetur

A tenetur in æquilibrio, vires Bb , Cc conjunctim sumptæ componunt vim vi Aa contrariam & æqualem. Sed (per Principia Statices) vires Bb , Cc hoc modo componi nequeunt, nisi transeat recta utraque Bb , Cc per punctum aliquod p in rectâ Aa , atque omnes Aa , Bb , Cc jaceant in plano communi. Ergò ita se res habet. *Q. E. D.*

LEMMA VI.

Si spatium materia gravi onustum a duobus filis sustinetur, respectu virium, quibus fila ista tenduntur, perinde est quonam modo disponatur materia in spatio isto; si modo Centrum Gravitatis semper versetur in eadem recta ad Horizontem normali.

Constat ex Staticis.

N. B. In propositionibus quatuor sequentibus sumus acturi de figuris funiculorum, linteorum aquâ plenorum, atque fornicum data onera sustentantium. Omnes hæc figuræ, utpote ex materia physica compositæ, veram habent crassitiem, sunt ad flexuram nonnihil ineptæ, & cedunt aliquantulum viribus, vel extendentibus vel comprimantibus. Ergò ad hæc omnia attendere oportet eum, qui velit has figuras accuratè describere. Sed cum ea ad computum mathematicum difficile revocentur, & calculum, per se satis prolixum, nimis impedirent, nos, eorum effectus prorsus negligentes, fingimus figuras propositas constare ex materiâ perfectè flexili extensioni, atq; contractioni prorsus inepta, atque adeo tenui, ut ejus crassities pœnè evanescat respectu longitudinis datæ. Respectu tamen sui ipsius non semper fingimus crassitiem esse absolute nullam, quoniam in funiculis, & in fornicibus propria tantum pondera sustentantibus, ea ad figuras formandas plurimum valet.

per idem punctum g , atque jacebunt in eodem plano, (per *Lem. 4.*) quod ob normalem GP est Horizonti perpendicularis. Sunt ergò tensiones horum filorum, ut latera trianguli Bbq eorum directionibus parallela. Sed si fiat $Bb = z$, erit $hb = y$, atque $Bb = v$, & (ob similia triangula Bbq , ECA ,) $bq = nz$, adeoque $bq = y + nz$, & $Bq = mz$. Quare est $a : p :: mz : y + nz$, hoc est $ay + naz - mpz = 0$. Est autem $p = vx$. Unde eliminato p ab æquatione hac (nempe fluente uniformiter z) erit $a\ddot{y} - mxv\ddot{z} = 0$. Itaque resolvendo æquationes $a\ddot{y} - mxv\ddot{z} = 0$, & $\ddot{v}v = \ddot{y}y + \ddot{z}z$, (per *Prop. 6.*) dabuntur relationes ipsorum z , y , v ; nam ex hypothesi datur x , vel per dignitates unius, vel duorum, vel omnium z , y , v .

C A S U S I.

Si utrumque y & v ingrediuntur valorem ipsius x , describetur curva per tres conditiones, quæ possunt pro lubitu applicari ad valores y , & v , & fluxionum suarum (per *Prop. 5.*)

C A S U S II.

Si desit y in valore x erunt conditiones omninò tres, quarum una ad minimum applicanda est ad valorem ipsius y , & reliquæ duæ possunt pro lubitu applicari ad valores ipsorum v & y , & fluxionum suarum.

C A S U S III.

Si tantum y ingreditur valorem ipsius x erunt etiam conditiones tres, applicandæ pro lubitu ad valores ipsorum v , y , & fluxionum suarum, modo ut una applicetur ad valorem ipsius v .

C A S U S IV.

Denique si in valore ipsius x desit utrumque v & y , erunt conditiones tres, quarum una applicanda est ad valorem ipsius v , altera

tera ad valorem ipsius y , & tertia pro lubitū applicari potest ad valores ipsorum v , y , & fluxionum suarum.

C O R O L L. I.

Per hanc solutionem, est tensio fili in B ad tensionem datam in A, ut Bb ad Bq, hoc est ut $\dot{v}$ ad $m\dot{z}$. Est ergo tensio in B ut $\frac{\dot{v}}{m\dot{z}}$, vel ob datum m , ut $\frac{\dot{v}}{\dot{z}}$. Sed per æquationem $ay + naz -$

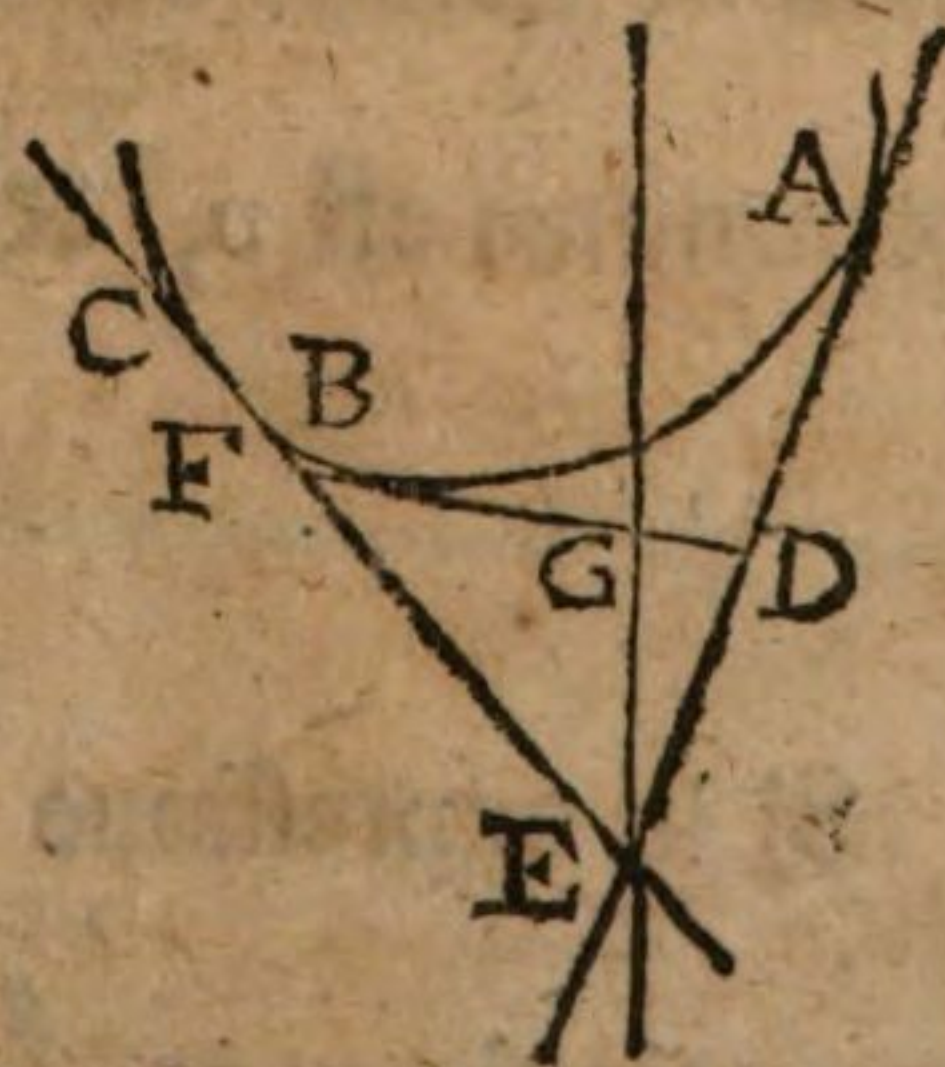
$$mpz = 0, \text{ est } \dot{v} (= \sqrt{\dot{z}\dot{z} + \dot{y}\dot{y}}) = \frac{\dot{z}}{a} \times \sqrt{n^2 a^2 - 2mnap + m^2 p^2};$$

atque est tensio in A æqualis a . Tensio itaque in B est $\sqrt{\frac{n^2 + 1}{m^2} a^2 - \frac{2n}{m} ap + p^2}$. Et cū hac tensio fit proportionalis ipsi

$\frac{\dot{v}}{\dot{z}}$, ea erit minima quando est $\dot{v} = \dot{z}$, hoc est in curvæ puncto infimo ad quod tangens est Horizonti parallela, existente tensione istā æquali $\frac{a}{m}$. Et hinc qualiscunque sit lex crassitudinis funiculi, datā tensione in uno puncto A, ducendo tangentem dabitur tensio in alio quovis puncto B.

C O R O L L. II.

Quinetiam ducendo tangentes dividi potest funiculus in partes quarum pondera sint in datā ratione. Sit enim ABC funiculus, & ad puncta tria A, B, C ducantur tangentes ADE, DBF, EFC sibi invicem occurrentes in D, E, & F, Tum (per hanc propositionem) centra gravitatis funiculorum AB, AC, BC, erunt



in

in perpendicularibus transeuntibus per respectivos tangentium concursus mutuos D, E, & F. Proinde si per duarum tangentium AD, CF concursum E ducatur perpendicularis EG occurrens tangenti tertiæ DBF in G, erunt pondera partium AB, BC inter se in ratione reciproca distantiarum propriorum centrorum gravitatis a centro gravitatis totius funiculi ABC, hoc est pondus ipsius AB erit ad pondus ipsius BC in ratione reciproca DG ad GF. Datâ ergo ratione ponderum, dabitur ratio DG ad GF. Unde datis positione rectis DE, GE, FE, dabitur directio tangentis tertiæ DBF, per quam invenitur punctum B, quo dividitur funiculi ABC pondus in datâ ratione.

C O R O L L. III.

Si in expressione crassitudinis x adfit tantum unum ex ipsis z , y , v , solvetur Problema per quadraturam curvarum.

C A S U S I.

Primo enim adfit tantum curva v in expressione crassitudinis x . Tum inito calculo per æquationes $a\dot{y} + na\dot{z} - mp\dot{z} = 0$, $\ddot{v} = \ddot{y} + \ddot{z}$, & brevitatis causâ pro $\sqrt{n^2a^2 - 2mnap + m^2p^2}$ scripto R, $+1$

invenietur $\dot{z} = \frac{a\dot{v}}{R}$, atque $\dot{y} = \frac{mp - na}{a} \dot{z} = \frac{mp - na}{R} \dot{v}$.

Unde dato p per quadraturam curvæ cujus abscissa est v , & ordinata x , deinde dabuntur z & y , quadrando curvas, quarum abscissa communis est v , & ordinatæ sunt $\frac{a}{R}$, atq; $\frac{mp - na}{R}$.

C A S U S II.

Si in expressione ipsius x adfit tantum z , ducto utroq; membro æquationis $\dot{z} = \frac{a\dot{v}}{R}$ in x , fiet $\dot{z}x = \frac{a\dot{p}}{R}$. Unde quadrando curvas,

curvas, quarum abscissæ sunt z & p , & quarum ordinatæ sunt x & $\frac{a}{R}$, dabitur relatio inter z & p . Deinde ob $\dot{v} = \frac{p}{x}$, & $\dot{y} =$

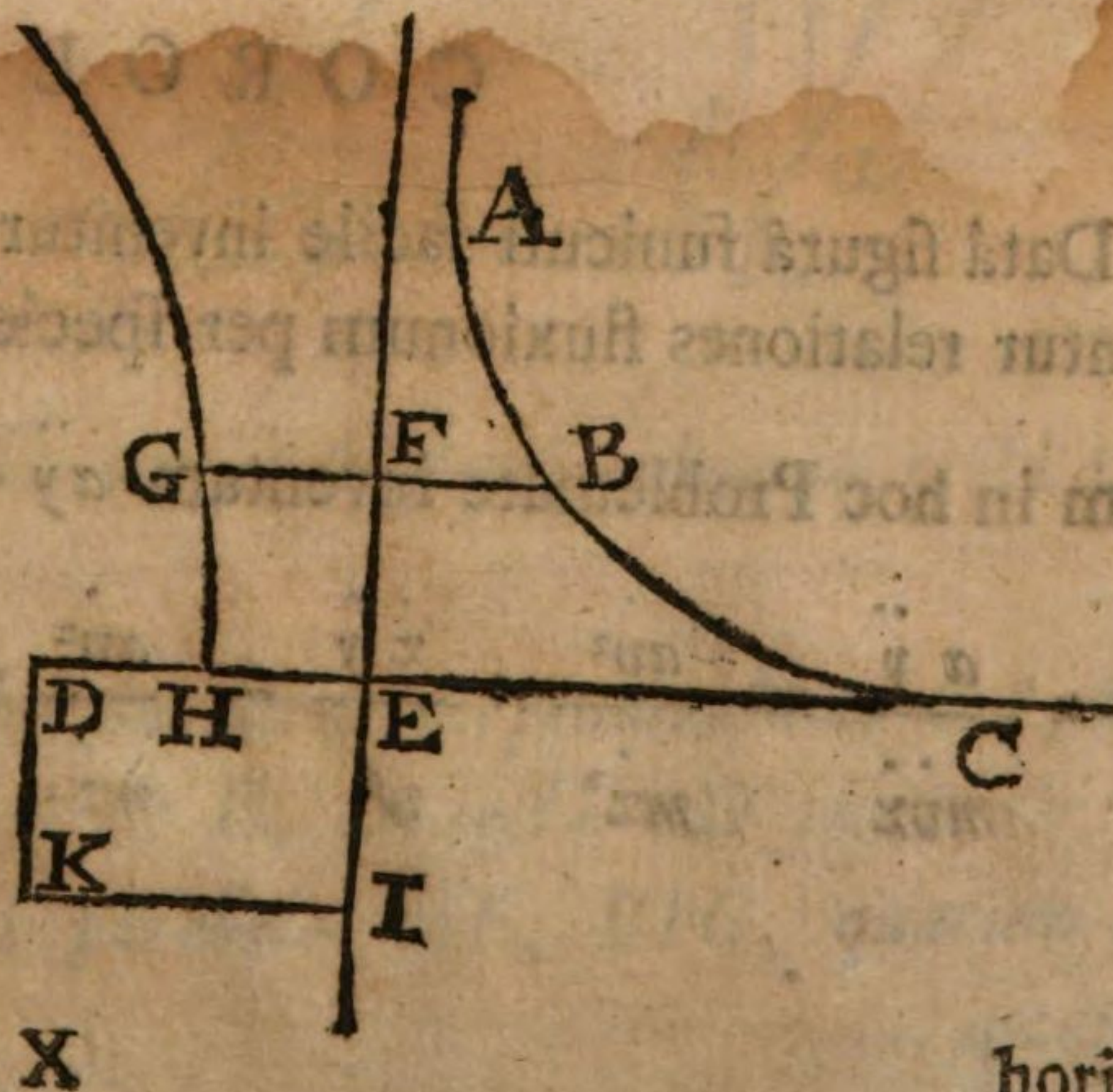
$\frac{mp - na}{a}$ z , quadrando curvas quarum abscissæ sunt p & z , & ordinatæ sunt $\frac{1}{x}$ & $\frac{mp - na}{a}$, dabuntur v & y .

C A S U S III.

Denique si in valore x adsit tantum y , ducendo æquationem $\dot{y} = \frac{mp - na}{R} v$ in x , fiet $\dot{y}x = \frac{mp - na}{R} p (= \frac{R}{m})$. Quare faciendo $\frac{R}{m}$ æquale areae curvæ cujus abscissa est y , & ordinata x , dabitur relatio inter p & y . Unde deinde quadrando curvam cujus abscissa est y , & ordinata $\frac{a}{mp - na}$ dabitur z . Dabitur autem v , ut in casu secundo, quadrando curvam cujus abscissa est p , & ordinata $\frac{1}{x}$.

C O R O L L. IV.

Per *Cas. 3. Cor. 3.* est $\frac{R}{m}$ æquale fluenti $\dot{y}x$, quod idem æquale est tensioni fili, (per *Cor. 1.*) Ergo fit ABC funiculus, ad cujus punctum infimum C ducatur tangens CEHD horizonti parallela, & ad eum ducatur normalis EF; atque ductâ BFG



horizonti parallela, in eâ sit semper $FG = x =$ crassitudini funiculi in B. Tum si sit GH curva, quam perpetuò tangit punctum G, atque area GFEH terminatæ ad tangentem CE addatur area EDKI = $\frac{a}{m}$, erit area tota IKDHGFEI semper æqualis tensioni fili in B.

Nam est $EF = y$, adeoque fluxio areae est $yx =$ fluxioni tensionis, quæ in puncto C æqualis est $\frac{a}{m}$.

C O R O L L. V.

Per *Ex. 4. Prop. 15.* est radius curvaturæ æqualis $\frac{\dot{y}^3}{zy}$, quare

(per æquationem $a\ddot{y} - m\dot{x}\dot{v}\dot{z} = 0$.) in funiculo est radius iste æqualis $\frac{a\dot{v}^2}{m\dot{x}\dot{z}^2}$, hoc est, æqualis areae DI (fig. Cor. 4.) applicatæ

ad FG, & deinde ductæ in $\frac{\dot{v}^2}{z^2}$, hoc est in quadratum secantis an-

guli, quem facit curva cum horizonte.

C O R O L L. VI.

Datâ figurâ funiculi facile invenitur ratio crassitudinis suæ. Nam dantur relationes fluxionum per speciem figuræ : unde per æquationem in hoc Problemate inventam $a\ddot{y} - m\dot{x}\dot{v}\dot{z} = 0$, datur crassitudo

$$x = \frac{a\ddot{y}}{m\dot{v}\dot{z}} = \frac{a\dot{v}^2}{m\dot{z}^3} \times \frac{\dot{z}\ddot{y}}{\dot{v}^3} = \frac{a\dot{v}^2}{m\dot{z}^2} \text{ applicato ad radium curvaturæ.}$$

P R O P.

PROP. XIX. PROB. XIV.

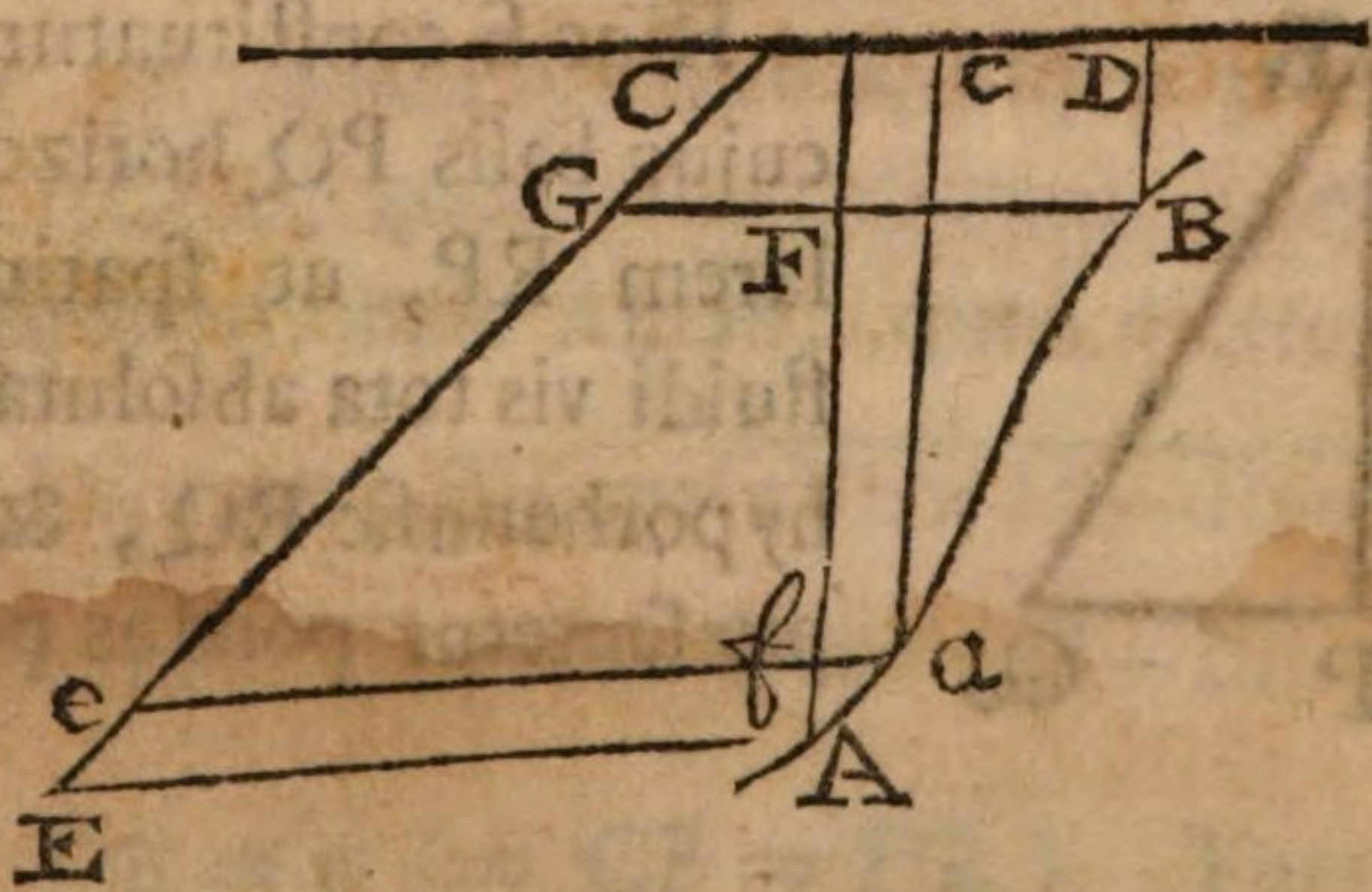
*Datâ ratione crassitudinis, invenire figuram
Fornicis proprium pondus sustinentis.*

Sit fornicis portio quædam AB , & sint a & b puncta ipsis A & B proxima, & ducantur tangentibus Ag , Bg . Tum si portionis AB centrum gravitatis sit G , per id ducta horizonti perpendicularis GP tranfinit per tangentium concursum g , (per Lem. 5. & 6.) quoniam sustinetur pondus arcus AB per lineolas aA , bB . Viribus itaque eodem modo interpretatis, atq; in Propositione præcedenti, constat figuram hujusmodi fornicis, eandem esse atq; funiculi, in situ tamen inverso.



LEMMA VII.

Sit AB linea quævis curva in plano ad horizontem perpendiculari, & per motum rectæ eidem plano normalis per curvam AB describetur superficies, per quam sustineatur fluidum cujus su-



perfacies Horizonti parallela occurrat plano eidem in rectâ CD .

Tum dico,

Quod si ad Horizontem ducantur perpendiculares CA , DB , occurrentes curvæ in A & B , & rectæ CD in C & D , & ducantur Horizonti parallele AE , BFG , quarum BF

occurrat

occurrat rectæ CA in F , & fiat $AE = CA$, atque ducatur CE occurrens BF in G , erit fluidi pressio tota lateralis, per quam urget fundum AB in directione Horizonti parallela, ad pondus fluidi spatii $CABD$ inclusi, ut area $AEGF$, ad aream $CABD$.

Duc ca horizonti perpendicularem, ipsi CA proximam, atque occurrentem curvæ AB & rectæ CD in a & c , atq; per a duc ae horizonti parallelam, occurrentem ipsis CA , CE in f & e . Tum coincidentibus punctis A & a , fluidi spatii $CAac$ inclusi pondere existente ut idem spatium, hoc est ut $CA \times fa$, ejus pressio absoluta in lineolam Aa perpendiculariter facta erit ut $CA \times Aa$; adeoque ejusdem pressio pars lateralis horizonti parallela in directione fa erit ut $CA \times fA$, hoc est ut $EA \times fA$. Existente igitur $CAac$ fluxione ponderis, erit $Eafe$ fluxio pressio lateralis; adeoque ubi pondus fit æquale areæ $CABD$, pressio lateralis fiet æqualis areæ $AEGF$. *Q. E. D.*

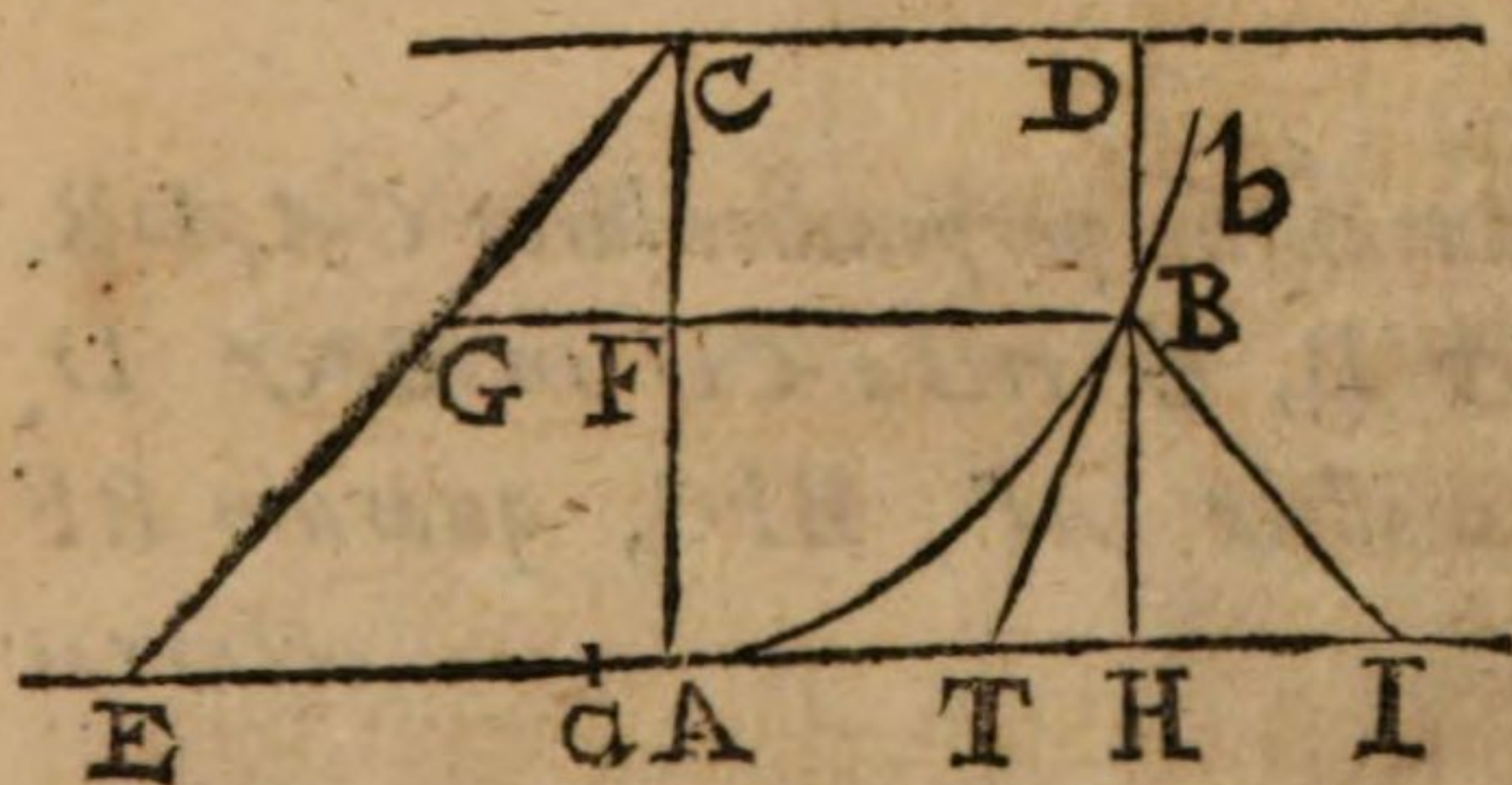
COROLLARIUM.



Hinc si constituatur triangulum rectangulum PQR , cujus basis PQ horizonti parallela sit ad perpendicularem RP , ut spatium $AEGF$ ad spatium $ACDB$, fluidi vis tota absoluta in fundum AB erit in directione hypotenuse RQ , & per eam repræsentabitur, si repræsentetur pondus per perpendicularem RP .

PROP. XX.

PROB. XV.



Invenire figuram Lintei aqua pleni.

Repræsentetur Lintei portio quædam per curvam AB , &

& aquæ superficies horizonti parallela per rectam horizonti paralle-
lam CD. Tangant linteum rectæ duæ EATHI, BT in A & B, sibi
mutuo occurrentes in T, quarum AT fit horizonti parallela, & per
puncta A & B ducantur ipsis CD, AT normales, iis occurrentes in
C, D, & H, & in AT fit $AE = AC$, & ductâ CE, ei occurrat BG
horizonti parallela in G, atq; ipsi CA in F.

Jam si in AT sumatur HI ad HB, ut est spatium AEGF ad aream
ACDB, erit hypothenusa BI parallela directioni totius vis absoluta
pressionis fluidi in fundum AB (per *Lem.* 7.) Sed huic vi resistitur per
tensiones filorum Aa, Bb, in directionibus tangentium AT, BT :
quare (per *Lem.* 5.) vis absoluta pressionis fluidi in fundum AB
æquipollet vi applicatæ ad punctum T in directione rectæ BI. Ten-
siones ergo filorum Aa, Bb, & vis pressionis fluidi in fundum AB,
sunt inter se ut rectæ earum directionibus parallelæ TI, TB, BI ;
simul existentibus pondere fluidi in spatio CABD, & pressione late-
rali in fundum AB ut BH & HI. Sed ob liquoris fluiditatem, libere
movebitur linteum per ejus particulas, tanquam per trochleas,
adeoque est tensio fili Bb æqualis tensioni fili Aa, & inde $TB = TI$.
Ergo si tensio fili data designetur per datum spatium a , atque pon-
dus fluidi per spatium continens ACDB, quod etiam dicetur A, &
pressio lateralis per spatium ei proportionale AEGF, quod dicetur
B, erit $a : A : B : TB : BH : HI$. Est autem $BH = \sqrt{2TB \times HI - HI^2}$;
(ob $TI = TB$) quare etiam per hanc analogiam erit $A = \sqrt{2aB - BB}$.

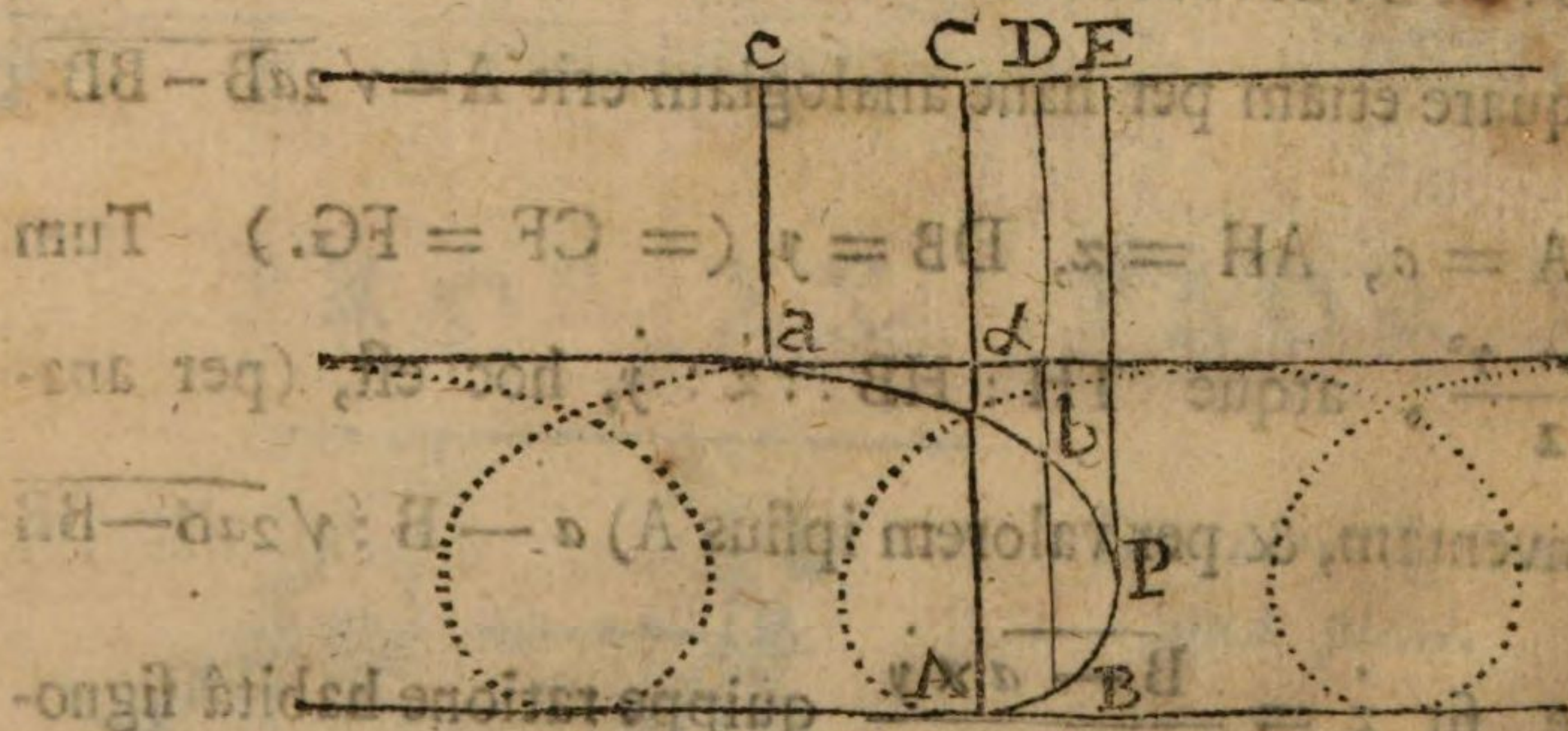
Sit jam $CA = c$, $AH = z$, $DB = y$ ($= CF = FG$.) Tum
erit $B = \frac{c^2 - y^2}{2}$, atque $TH : HB :: z : y$, hoc est, (per ana-
logiam supra inventam, & per valorem ipsius A) $a - B : \sqrt{2aB - BB}$
 $:: z : y$. Unde fit $z = \frac{B - a \times y}{\sqrt{2aB - BB}}$ quippe ratione habitâ signo-

rum ipsorum z & y . Nam ubi curva est versus terram convexa, cre-
Y scente

sciente z , decrefcit y , atque est $B = \frac{cc - y^2}{2}$: Sed ubi curva est ad concava, ipforum z & y fluxiones sunt ejusdem signi, existente etiam $B = \frac{yy - cc}{2}$. Ipfius autem z fluxio est ejusdem formæ in utroque casu, signo tantum mutato. In casu figuræ præsentis fluidum verè continetur in linteo: in casu altero jacet ad linteï partes inferiores, idque (puta mediante syphone) sursum urget cum vi in quovis puncto proportionali fluidi altitudini perpendiculari infra altissimam superficiem horizontalem.

Datur autem z ex dato y , quadrando curvam cujus abscissa est y , atq; ordinata $\frac{B - a}{\sqrt{2aB - BB}}$. Et per coefficientem indeterminatum in valore fluentis z , & per coefficientes duos a & c accommodari potest solutio ad tres conditiones, quarum ad minimum una respectum habebit ad valorem ipsius z ; per quem nempe determinatur positio curvæ.

Per æquationem $\dot{z} = \frac{B - a \times y}{\sqrt{2aB - BB}}$ ($= \frac{B - a}{A} \dot{y}$) est $\frac{\dot{z}}{\dot{y}} = 0$,



hoc est, ordinata y tangit curvam, quando est $B = a$, i. e. $\frac{cc - yy}{2} = a$,
vel

vel $y = \sqrt{cc - 2a}$. Et in hoc casu est area $A = a$. Item ubi $A = 0$, erit z infinita respectu y , hoc est curva tanget rectam horizonti parallelam. Et hoc fit ubi est $2aB - BB = 0$, id est, vel quando $B = 0$, adeoque $y = c$, vel quando $B = 2a$, adeoque $y = \sqrt{cc - 4a}$. Ergo si fit CD fluidi superficies horizontalis, atque ad horizontem ducatur normalis CA , & in eâ sumantur $CA = c$, & $Ca = \sqrt{cc - 4a}$, & per puncta A & a ducantur Al & aa horizonti parallelæ, curva descripta utrasque tanget, & inter eas tota jacebit. Idque fiet sub hac conditione, ut ordinata DB primum pergendo de CA per DB perveniat in EP , ubi fit $EP = \sqrt{cc - 2a}$, atque area $CABPE = a$; deinde regrediendo de EP per Db perveniat in ea , ubi fit $ea = \sqrt{cc - 4a}$, atque area $EPbac = a$. Nam progrediente ordinatâ area increfcit, & regrediente ordinatâ decrefcit: quare si area fit nihil, hoc est indicium, vel ordinatam de loco suo nondum movisse, vel quod area decrementum per regressionem ordinatæ æquale fit ejusdem incremento prius facto per progressionem ordinatæ. Et hinc per infinitas repetitiones figuræ $APBba$ utrinque factas curva serpet perpetuò inter horizonti parallelas Al , aa ad instar cycloidis, ubi punctum describens sumitur ultra peripheriam rotæ.

In hac curvâ est radius curvaturæ æqualis ipsi $\frac{a}{y}$. Quod mox demonstrabimus in propositione sequenti.

PROP. XXI. PROB. XVI.

Invenire figuram Fornicis sustentis onus fluidi superincumbentis.

In hac figurâ vires omninò interpretantur ut in *Prop. 20.* Quare est hujus fornicis figura eadem, atque figura lintei, onere tantum ad contrarias partes figurarum applicato; in hac enim applicatur fluidum ad curvæ partes convexas, in illâ ad partes concavas.

Sed



Sed ut per varias solutiones res quodammodo fiat illustrior, repræsentetur fornicis portio quædam per curvam AB; vertice summo ubi tangens est horizonti parallela, existente A. Repræsentetur etiam fluidi superficies summa per rectam horizonti parallelam CD, & ductis horizonti normalibus AC, BD, sint $AC = c$, $CD = z$, $DB = y$, atque curva $AB = v$, & pro area CABD scribatur A. Sume puncta b & p utrinque ad distantias æquales minimas a puncto B, & ducatur ad curvam normales bS , pS concurrentes in S, atque ducantur tangentes bt , pt concurrentes in t , & compleatur parallelogrammum $btpr$.

Constat puncta b & p versus invicem urgeri per vires duas in directionibus tangentium bt & pt ; his autem viribus resisti per pondus fluidi insistentis fundo bp , idque in directione ad fundum perpendiculari. Sunt ergo vires illæ ut latera trianguli btr earum directionibus parallela, vel ut latera trianguli confimilis Sbp . Sed punctum b sustinet pondus totius fluidi in areâ CABD, cujus pressio in directione bt est ad ejusdem pressionem perpendicularem ut secans anguli bBD ad radium, hoc est ut $\dot{v}$ ad y : item pressio in fundum bp est ad pondus fluidi in spatio ACDB ut $bp \times y$ ad A. Quare conjunctis his rationibus fit $bp \times y \dot{y}$ ad $A\dot{v}$ ut bp ad bS ; adeoque $bS =$

$$\frac{A\dot{v}}{yy}. \text{ Sed datâ } \dot{v} \text{ est } bS = \frac{\dot{v} z}{\ddot{y}} \text{ (per Ex. 4. Prop. 15) Unde fit}$$

$$\frac{\dot{v} z}{\ddot{y}} = \frac{A\dot{v}}{yy}, \text{ hoc est } z\ddot{y}y = A\ddot{y}, \text{ vel } \ddot{A}y - A\ddot{y} = 0. \text{ Unde capi-}$$

$$\text{endo fluentes fit } \frac{A}{y} = \frac{a}{v}, \text{ hoc est } A\dot{v} = a\dot{y}. \text{ Est autem } \dot{v} \dot{v} =$$

$z\dot{z} + y\dot{y}$, unde fit $\dot{y} = \frac{A\dot{z}}{\sqrt{a^2 - A^2}}$; hoc est $\dot{y}y = \frac{A\dot{A}}{\sqrt{a^2 - A^2}}$. Unde

(capiendo fluentes, & addendo $a + \frac{cc}{2}$, ut fiat $y = c$ in vertice

curvæ, ubi est $A=0$), fit $\frac{y^2}{2} = a + \frac{c^2}{2} - \sqrt{a^2 - A^2}$. Pro

$\frac{y^2 - c^2}{2}$ scribe B , atque calculo peracto invenietur $A = \sqrt{2aB - B^2}$;

adeoque $z = \frac{a - B \times \dot{y}}{\sqrt{2aB - BB}}$, omninò ut in *Prop.* 20.

COROLLARIUM.

In hac solutione inveniebatur $\frac{A}{\dot{y}} = \frac{a}{\dot{v}}$, atque erat $bS =$

$\frac{A \dot{v}}{y \dot{y}}$. Est ergò pressio $\frac{Av}{y}$ facta in lineolam bB æqualis datæ a ,

atque radius curvaturæ $bS = \frac{a}{y}$.

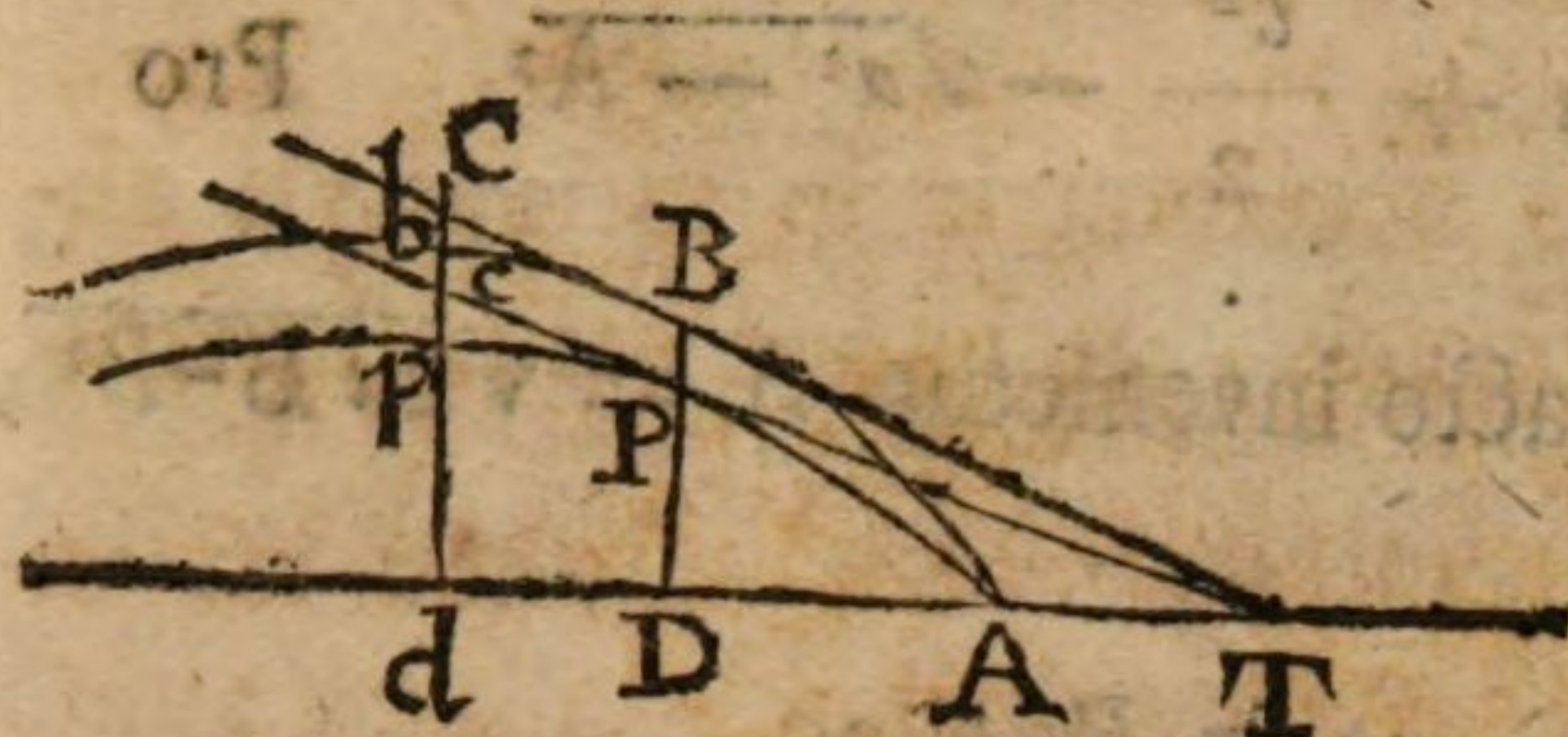
SCHOLIUM.

Ex hac expressione radii curvaturæ constat eandem hanc curvam etiam esse figuram laminæ elasticæ datâ vi flexæ. Nam est flexura in ratione reciproca radii curvaturæ, adeoque in hac curva in directa ratione altitudinis y . Sed dati ponderis vis ad laminam incurvandam est ut ejusdem distantia minima a puncto flexuræ. Quare si pondus applicetur ad laminam in recta CD , figura genita ea erit quam hic descripsimus.

Quinetiam manentibus punctis, in quibus hæc curva occurrit fluidi superficie horizontali CD , si minuatur altitudo maxima c in
Z
infinitem

Infinitum, erit hæc eadem curva cujus figuram induit Nervus musicus vibrans, in quovis articulo motûs sui. Quod jam demonstrare properamus.

LEMMA VIII.

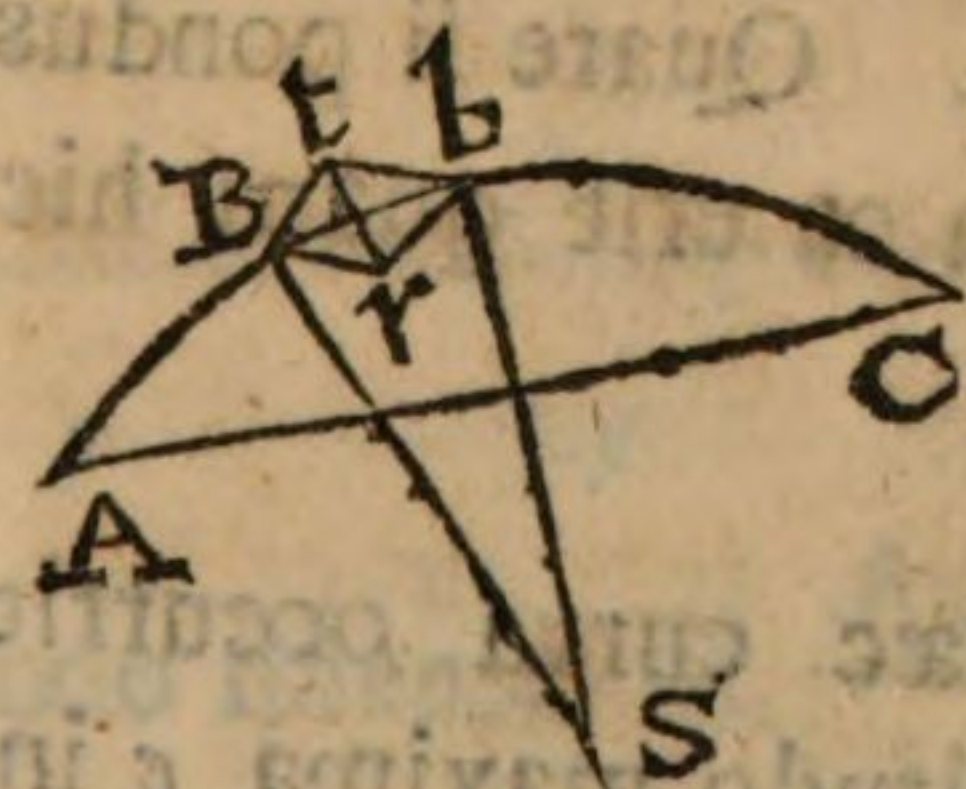


Si curvarum duarum AB, AP abscissam communem habentium AD, ordinatæ DB, DP sint ad invicem in datâ ratione, imminutis iis in infinitum,

ut curvæ tandem coincident cum axe AD, erit ultima ratio flexuræ eadem, quæ ordinatarum.

Duc novam ordinatam dp curvis occurrentem in p & b , & ad puncta B & P duc tangentes occurrentes dp in C & c. Tum ob datam rationem ordinatarum, tangentes productæ concurrent in aliquo puncto T in axe AD. Unde ob parallelas db , DB, erit $dC : dc :: DB : DP :: db : dp :: dC - db : dc - dp$, hoc est $bC : pc :: DB : DP$. Coincident jam ordinatæ db , DB, atque lineolæ evanescentes bC , pc erunt subtensæ angulorum contactus bBC , pPc ; atque imminutis ordinatis in infinitum erunt angulis ipsis proportionales. Sed per hos angulos æstimatur flexura. Quare coincidentibus curvis AB, AP cum axe AD, erit flexura in B ad flexuram in P ut ordinata DB ad ordinatam DP. Q. E. D.

LEMMA IX.



Datâ crassitudine nervi tensi, vis acceleratrix cujusvis puncti est ut flexura in isto puncto.

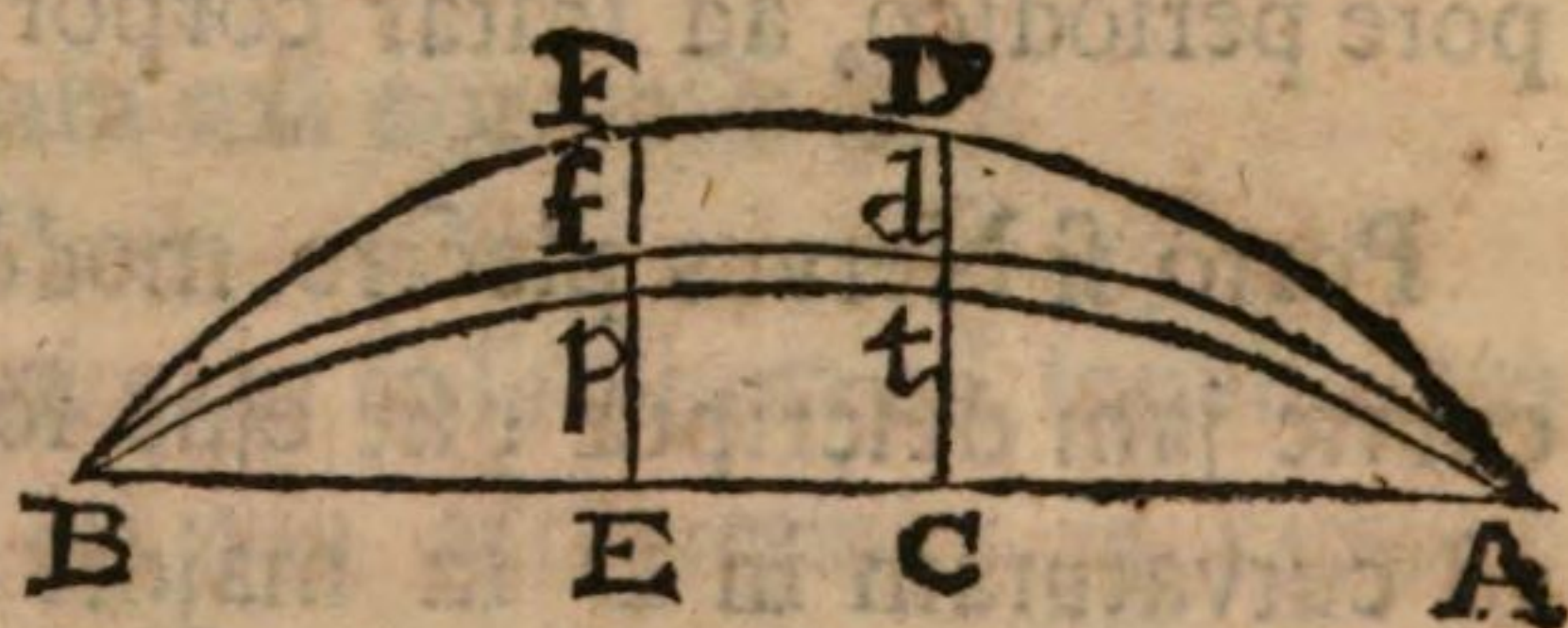
Sit nervus in positione curvæ ABC. Sume punctum b puncto B proximum, & duc tangentes Bt, bt concurrentes

tes in t , & compleatur parallelogrammum $Btbr$, atque ad curvam ducantur normales BS , bS concurrentes in S . Tum (per principia Statices) erit vis absoluta ad movendam particulam Bb in directione tr ad fili tensionem in B , vel in b , per quam generatur vis illa, ut tr ad tB , hoc est ut Bb ad BS , adeoque vis illa est ut $\frac{Bb}{BS}$; quoniam fili tensio est data. Sed est vis acceleratrix in ratione vis absolutæ directè & materiæ movendæ inverse; & in hoc casu est materia movenda ut Bb . Quare est vis acceleratrix ut $\frac{1}{BS}$, hoc est ut curvatura in B ; curvatura enim est in ratione reciproca radii.

PROP. XXII. PROB. XVII.

Definire motum Nervi tensi.

In his pono nervum constare ex materiâ tenuissimâ uniformiter crassâ, ejusq; elongationem maximam ab axe motus AB esse infinitè parvam; ita ut vis tensionis non mutetur per auctam longitudinem nervi in majoribus suis distantiis ab axe AB , & ut inclinatio radiorum curvaturæ ad axem sit semper insensibilis.



SOLUTIO.

Per puncta A & B describetur curva $ADFB$, cujus indoles fit, ut, ductis ad libitum ordinatis ad axem normalibus CD , EF , fit curvatura in D ad curvaturam in F , ut DC ad FE . Dico quod hæc fit figura, quam induit nervus in quovis articulo motus sui; item quod puncta omnia D , F simul ad axem pervenientia & simul redeuntia vibrationes suas omnes peragent in eodem tempore periodico, ad instar penduli oscillantis in Cycloide. *Q. E. F.*

DE-

DEMONSTRATIO.

Sit enim curva ADFB nervi distantia maxima ab axe AB, punctis omnibus jam quiescentibus. Tum quoniam curvatura in D est ad curvaturam in F ut distantia CD ad distantiam EF (ex hypothesi) erit acceleratio in D ad accelerationem in F in eadem ratione distantiarum (per *Lem.* 9.) adeoque in initio motus spatia simul percurfa Dd , Ff erunt in eadem ratione: adeoque & divisim spatia percurrentia Cd , Ef erunt in eadem ratione: unde etiam accelerationes novæ in punctis d , & f erunt in eadem ratione (per *Lem.* 8, & 9.) atque erunt ad accelerationes priores in D & F, ut distantia dC & fE ad distantias DC & FE (per eadem *Lemm.*) Ergo puncti cujuscvis D, vel ut in eadem curva ADFB, vel ut in diversis ADFB & AdfB spectati, acceleratio semper est ut ejusdem distantia ab axe motus AB. Quare (per *Prop.* 51. *Lib.* 1. *Phil. Nat. Princ. Math.*) puncta omnia Nervi ad axem simul perveniunt, simul redeunt, & vibrationes singulas peragunt in dato tempore periodico, ad instar corporis in Cycloide oscillantis. Q. E. D.

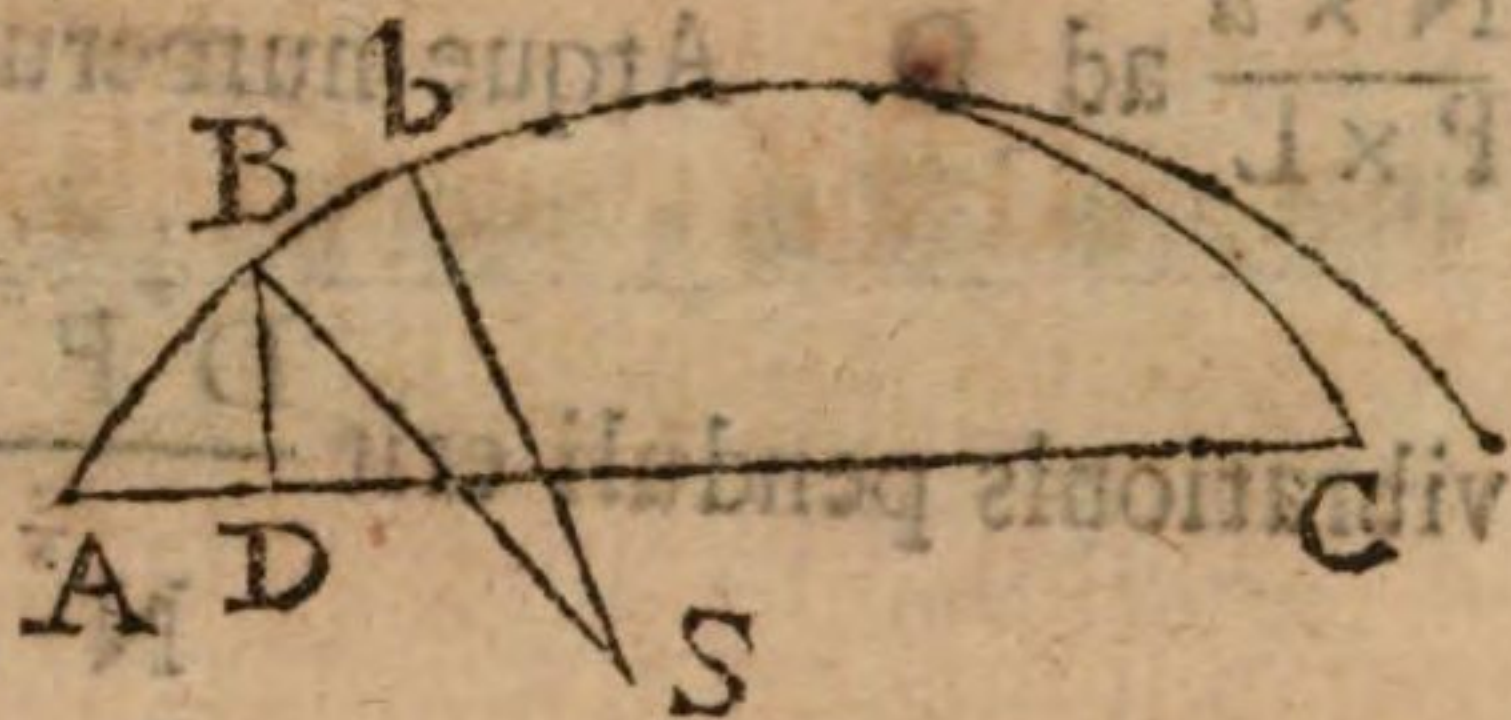
Porro si Nervus plectro modo percussus nondum induerit formam curvæ jam descriptæ; sit ejus forma ADFB, curvatura in F existente ad curvaturam in D in majori ratione quam distantia FE ad distantiam DC. In hoc casu velocitas in F est ad velocitatem in D, vel in majori, vel in minori ratione, quam distantia FE ad distantiam DC. Si fit velocitas in F ad velocitatem in D in ratione majore quam FE ad DC, erit spatium Ff in tempore minimo descriptum ad spatium Dd eodem tempore descriptum in ratione majore quam EF ad CD; adeoque divisim erit fE minor respectu FE, quam est dC respectu DC, indeque (per *Lemm.* præd.) acceleratio in f minor erit respectu accelerationis in F, quam est acceleratio in d respectu accelerationis in D. Itaque majoris velocitatis acceleratione semper decrescente, & minoris velocitatis acceleratione è contra semper crescente (respectu distantiarum ab axe AB,) motus inter se tandem ita temperabuntur, ut perventis punctis F & D in puncta quædam p & t , erunt tum velocitates tum accelerationes ut distantia pE , tC ; adeoque curva AtpB jam existente eadem quam descripsimus, motus
dehinc

dehinc omnes conspirent. Atque idem eveniet si fit velocitas in F ad velocitatem in D in minore ratione quam distantia FE ad distantiam DC. Quare quocunque modo percutiatur nervus, quam citissime induet formam curvæ hic descriptæ, atque perget moveri more jam descripto. *Q. E. D.*

P R O P. XXIII. P R O B. XVIII.

Datis longitudine Nervi, ejusdem pondere, & pondere tendente; invenire tempus periodicum.

Sit Nervi inter puncta A & C extensi longitudo L, ejusdem pondus N, atq; pondus tendens P, & constitutur nervus in positione ABC; & sumptis punctis B & b proximis, ducantur ad curvam normales BS, bS, concurrentes in S; & ducatur ordinata axi normalis BD.



Per *Lem. 9.* est vis tensionis Nervi ad vim absolutam ad movendam particulam Bb ut BS ad Bb. Sed est vis acceleratrix in ratione compositâ vis absolutæ directæ & materiæ movendæ inverse. Quare si particulæ movendæ Bb pondus dicatur p , erit acceleratio particulæ Bb ad accelerationem ponderis P ab ipsius propriâ gravitate oriundam, hoc est, vis acceleratrix nervi ad movendum punctum B ad vim acceleratricem gravitatis, ut $\frac{Bb}{p}$ ad $\frac{BS}{P}$; unde si gravitatis acceleratio

data dicatur 1, erit puncti B acceleratio $\frac{Bb \times P}{BS \times p}$. Sed est P ad p in ratione compositâ P ad N, & N ad p , seu L ad Bb, unde fit $\frac{P}{p} = \frac{P \times L}{N \times Bb}$. Adeoq; acceleratio puncti B est $\frac{P \times L}{N \times BS}$. Sed

quoniam

quoniam est curvatura ut distantia BD (per Prop. 22.) quæ eadem est ut $\frac{I}{BS}$, erit $BS \times BD$ quantitas data. Sit illa a . Tum pro BS

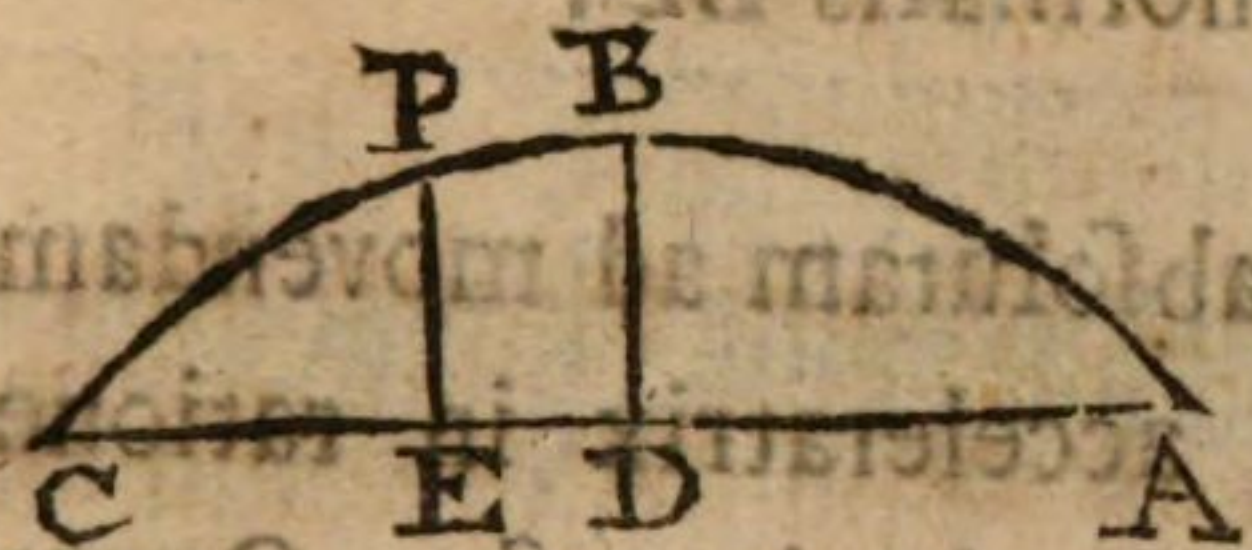
substituto $\frac{a}{BD}$, fiet acceleratio puncti B æqualis $\frac{P \times L \times BD}{N \times a}$. Sed

in funipendulis tempora periodica sunt in dimidiatâ ratione longitudinum directè, & virium acceleratricium inversè (per Prop. 52. Lib. 1. Princip. Math.) Quare si constituatur pendulum cujuscvis longitudinis D, erit tempus periodicum nervi ad tempus periodicum istius

penduli in dimidiatâ ratione (BD applicatæ ad $\frac{P \times L \times BD}{N \times a}$, hoc est)

$\frac{N \times a}{P \times L}$ ad D. Atque numerus vibrationum nervi in tempore unius

vibrationis penduli erit $\frac{D^{\frac{1}{2}} P^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}}}{N^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}}}$.



Supereft ut inveniamus quantitatem a . Constituatur itaque nervus in positione ABPC, & ad axis AC punctum medium D erigatur ordinata normalis DB, & fit alia quævis ordinata EP, atq; sint $DB =$

c , $DE = z$, $EP = y$. Tum ob radium curvatura æqualem $\frac{a}{y}$,

erit (per Prop. 21.) $z = \frac{B - a \times y}{\sqrt{2aB - BB}}$, nempe pro B sumpto

$\frac{cc - yy}{2}$. Sed evanescentibus c & y hæc expressio fit $z = \frac{-ay}{\sqrt{ac^2 - ay^2}}$

$= \frac{-a^{\frac{1}{2}} y}{\sqrt{cc - yy}}$, vel $z = \frac{-a^{\frac{1}{2}}}{c} \times \frac{cy}{\sqrt{cc - yy}}$. At enim est $\frac{cy}{\sqrt{c^2 - y^2}}$ flu-

xio arcus circularis, cujus sinus est y , & radius c . Quare arcu quadrantali

drantali in isto circulo existente q , erit $DC = \frac{a^{\frac{1}{2}}}{c} \times q = \frac{1}{2} L$. Un-

de est $a^{\frac{1}{2}}$ ad $\frac{1}{2} L$ ut radius circuli ad arcum quadrantalem, vel $a^{\frac{1}{2}}$ ad L ut diameter circuli ad peripheriam ejusdem. Sit ergò p peripheria circuli cujus diameter est 1 , atque jam existente $a^{\frac{1}{2}} = \frac{L}{p}$: erit numerus vibrationum Nervi, in tempore unius vibrationis penduli

datae longitudinis D , æqualis $\frac{D^{\frac{1}{2}} P^{\frac{1}{2}} p}{L^{\frac{1}{2}} N^{\frac{1}{2}}}$. Q. E. I.

C O R O L L. I.

Comparatis motibus Nervorum inter se, ob data p & D , erit tem-

pus periodicum Nervi ut $\frac{L^{\frac{1}{2}} N^{\frac{1}{2}}}{P^{\frac{1}{2}}}$.

C O R O L L. II.

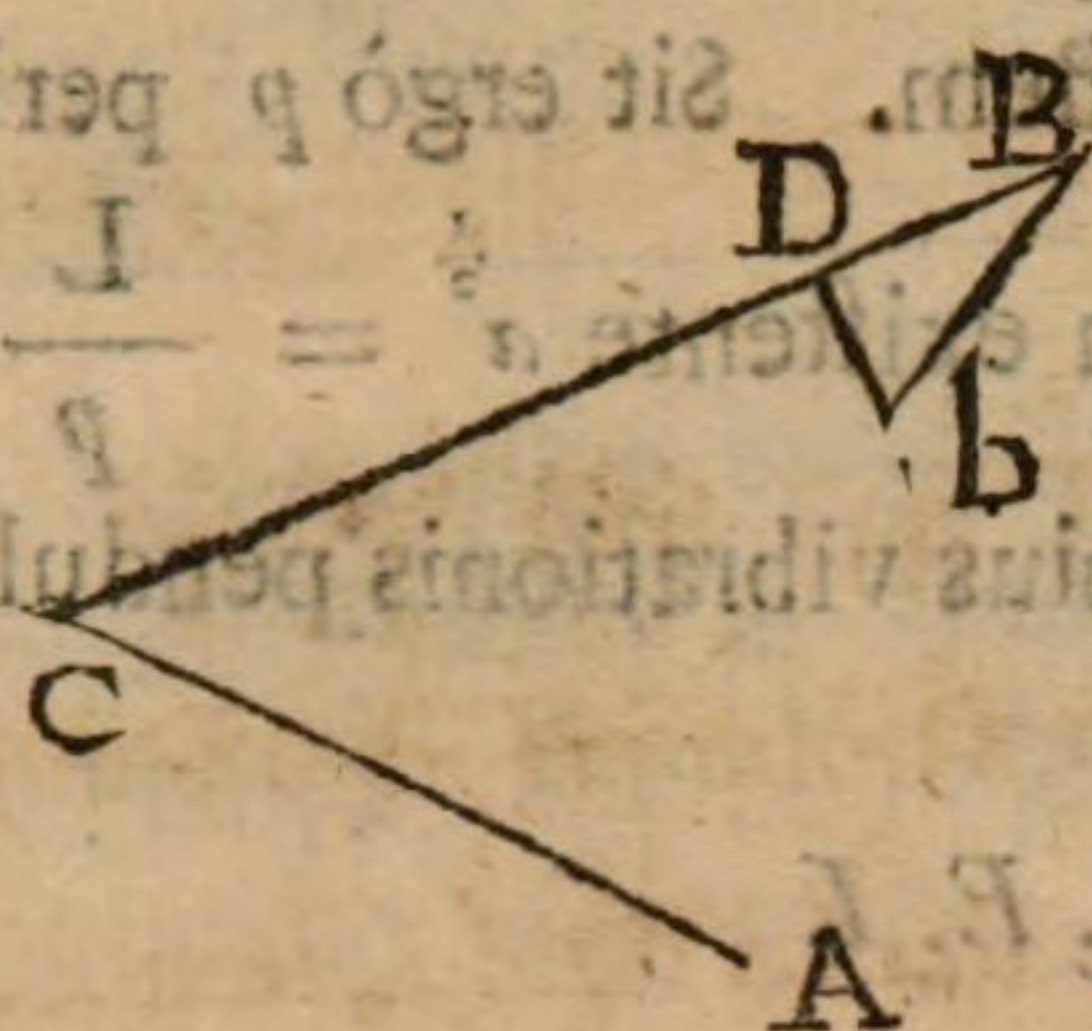
Ubi Nervi constituuntur ex eodem filo, est Nervi pondus N ut ejusdem longitudo L . Quare in comparandis motibus hujusmodi Nervorum, est Tempus periodicum ut $\frac{L}{P^{\frac{1}{2}}}$.

C O R O L L. III.

Iisdem positis, si præterea detur pondus P , hoc est, si longitudo sumantur in eodem Nervo diversimode obturato, erit Tempus periodicum ut L . Sed respectu Nervi aperti, pars dimidia edit sonum Diapason, pars $\frac{2}{3}$ edit sonum Diapente, pars $\frac{3}{4}$ edit sonum Diatessa-ron, & sic de cæteris. Quare a Musicis recte definiuntur proportiones hujusmodi tonorum per numeros, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, &c. longitudinibus Nervorum proportionales.

L E M.

L E M M A X.



Si in punctum datum spatii rigidi circa datum axem mobilis, impingat data particula in datâ directione, data cum velocitate; atq; in figura præsentî sint puncta C, B, b, A intersectiones plani ad axem datum rotationis perpendicularis, cum ipso axe & cum rectis ei parallelis, transeuntibus per locum puncti in quod impingit particula data, per extremitatem rectæ in directione motus, & proportionalis velocitati istius particule impingentis; & per spatii ejusdem aliud punctum datum: atq; ad CB ducatur normalis bD: tum erit motus istius spatii productus per impulsus istius particule omnino idem, ac si produceretur per aliam particulam, cujus magnitudo est ad magnitudinem particule prioris, ut CB^2 ad CA^2 , & velocitas est ut $D b \times \frac{CA}{CB}$, impingentem in istud aliud punctum datum cujus projectio est A, cum directione tum rectæ CA tum Axi rotationis perpendiculari.

Nam per rigorem spatii omnis motus tollitur, nisi quatenus fit in planis ad axem normalibus. Quare punctis omnibus de quo agitur modo prædicto ad tale planum reductis, particule impingentis velocitas & ejusdem directio in hoc plano repræsentabitur per rectam Bb. Sed hujus velocitatis pars BD tollitur per resistantiam puncti C, & per partem reliquam Db producitur motus spatii. Velocitas autem puncti A est ad velocitatem puncti B, ut distantia a centro CA ad distantiam CB: quare puncti A velocitas producta per motum particule impingentis in B erit $D b \times \frac{CA}{CB}$. Sed & momentum ejusdem

ejusdem particulæ est ad momentum quod tribuit puncto A, ut CA ad CB: quare si particulæ istius magnitudo sit p , ejus momento in B existente $p \times Db$, momentum ab eâ tributum puncto A erit

$p \times Db \times \frac{CA}{CB}$. Sed eadem velocitas & idem momentum produ-

cuntur in puncto A per vim particulæ $p \times \frac{CB^2}{CA^2}$ impingentis in illud punctum, in directione ipsi CA perpendiculari cum velocitate $Db \times \frac{CA}{CB}$. Quare respectu motus producti in spatio rigido, perinde

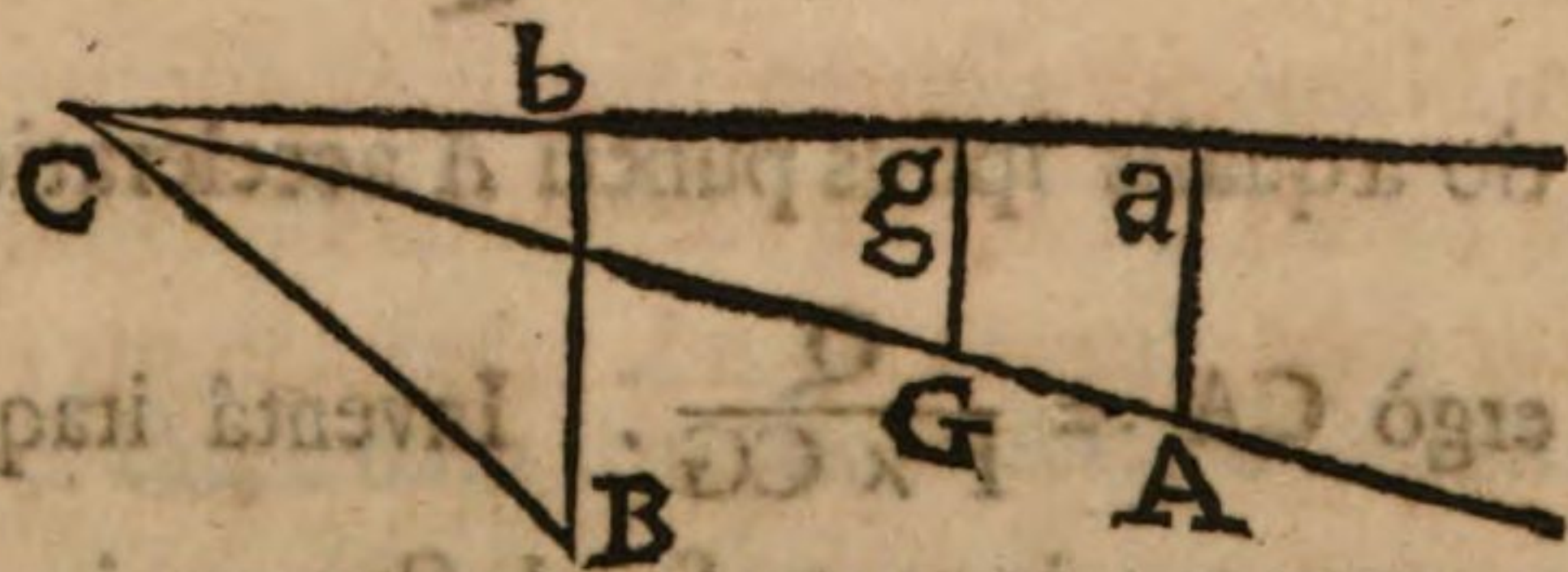
omninò est five particula p impingat in B, five particula $p \times \frac{CB^2}{CA^2}$ impingat in A modo jam definito. Q. E. D.

PROP. XXIV. PROB. XIX.

Corporis dati e dato Axe Horizonti parallelo dependentis invenire Centrum Oscillationis.

Per Centrum Oscillationis intelligo punctum, cujus velocitas idem semper est ac si corpore reliquo amoto illud solum circa eundem axem oscilletur.

Sit ergò præfens figura in plano ad horizontem & ad Axem oscillationis perpendiculari, transeunte per corporis centrum gravitatis G, atque sit C intersectio hujus plani cum Axe oscillationis. Duc Horizonti parallelam Cg, atque in rectâ CG sit A Centrum oscillationis quæsitum. Sit p particula prismatica Axi motus parallela, & plano figuræ insistens in puncto B. Duc CB, & ad rectam Cg duc perpendiculares Bb, Gg, Aa, ei occurrentes in b, g, a .



Si gravitatis acceleratio data fit 1, tum particulæ p acceleratio, ad spatium figuræ movendum circa punctum C , erit $\frac{Cb}{CB}$. Quare pun-

cti A momentum a vi particulæ p oriundum erit $(p \times \frac{Cb}{CB} \times \frac{CB}{CA} =)$

$p \times \frac{Cb}{CA}$. Sed (per *Lem.* 10.) motus puncti A per particulam p in puncto B productus perinde omnino est, ac si produceretur a particulâ $p \times \frac{CB^2}{CA^2}$ impingente in ipsum punctum A . Quare vice particu-

larum p in locis B , substitutis novis particulis $p \times \frac{CB^2}{CA^2}$ in puncto A , dabitur acceleratio puncti A , oriunda ex conjunctis viribus totius Corporis dati, per notissimam regulam Collisionum; nempe applicando summam omnium momentorum $p \times \frac{Cb}{CA}$ ad summam omnium

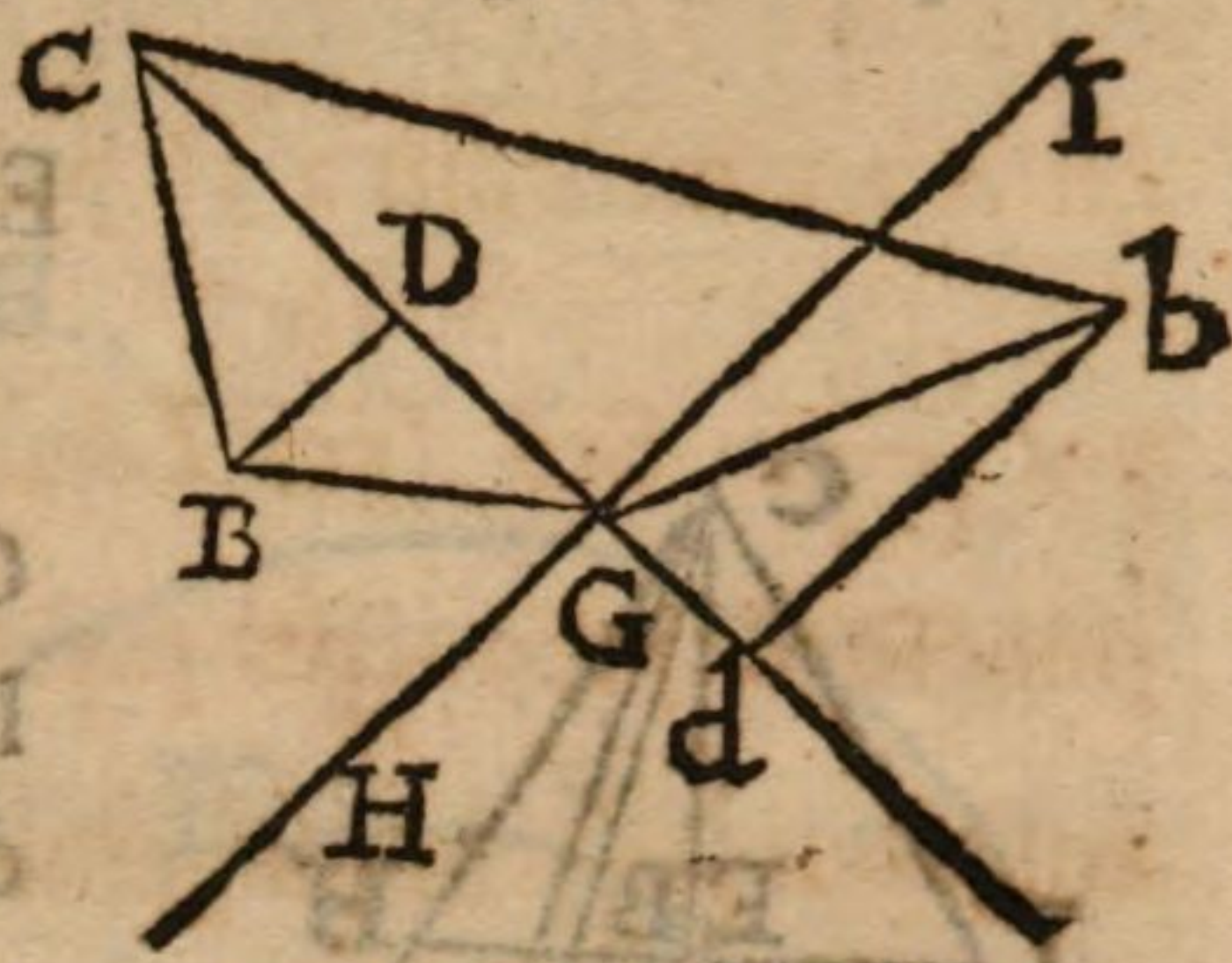
particularum substitutarum $p \times \frac{CB^2}{CA^2}$, hoc est (ob datum CA) applicando summam omnium $p \times Cb \times CA$ ad summam omnium $p \times CB^2$: Sed ex notissimâ proprietate centri gravitatis, si magnitudo corporis totius dati sit P , erit summa omnium $p \times Cb$ æqualis $P \times Cg$. Quare si pro summâ omnium $p \times CB^2$ scribatur Q , erit acceleratio puncti A æqualis $\frac{P \times Cg \times CA}{Q}$. Sed, ex hypothesi, est hæc accelera-

tio æqualis ipsius puncti A accelerationi propriæ $\frac{Ca}{CA}$ vel $\frac{Cg}{CG}$. Est

ergò $CA = \frac{Q}{P \times CG}$. Inventâ itaque summâ omnium particularum corporis propositi ductarum in quadrata suarum distantiarum minimarum ab Axe oscillationis, per Fluxionum Methodum inversam, dabitur distantia centri oscillationis ab Axe, applicando hanc summam ad productum corporis dati ducti in distantiam centri gravitatis ab Axe oscillationis. *Q. E. I.*

C O R O L L. I.

In eodem plano existentibus punctis C, G, B iisdem ac supra, ad CG duc normales HGI, BD. Tum erit $CB^2 = BG^2 + CG^2 - 2CG \times GD$; nempe cadente puncto B ad easdem partes rectæ HI atque punctum C. Sed ubi cadit punctum *b* ad contrarias partes rectæ HI, erit $CB^2 = bG^2 + CG^2 + 2CG \times Gd$. Est ergò summa omnium particularum ductarum in propria sua CB^2 per totam figuram, æqualis summæ omnium parti-



cularum ductarum in propria $BG^2 + CG^2$ per totam figuram, minus summâ omnium $p \times 2CG \times GD$ ex unâ parte rectæ HI, plus summâ omnium $p \times 2CG \times Gd$ ex alterâ parte HI. Sed ex naturâ centri gravitatis est summa omnium $p \times 2CG \times Gd$ æqualis summæ omnium $p \times 2CG \times GD$. Quare est summa omnium $p \times CB^2$, seu Q, æqualis summæ omnium $p \times GB^2 + p \times CG^2$, hoc est, (ob datum CG^2) æqualis $P \times CG^2$ plus summa omnium $p \times GB^2$. Si ergò pro summa omnium $p \times GB^2$ scribatur D, erit $Q = P \times CG^2 + D$; adeoque

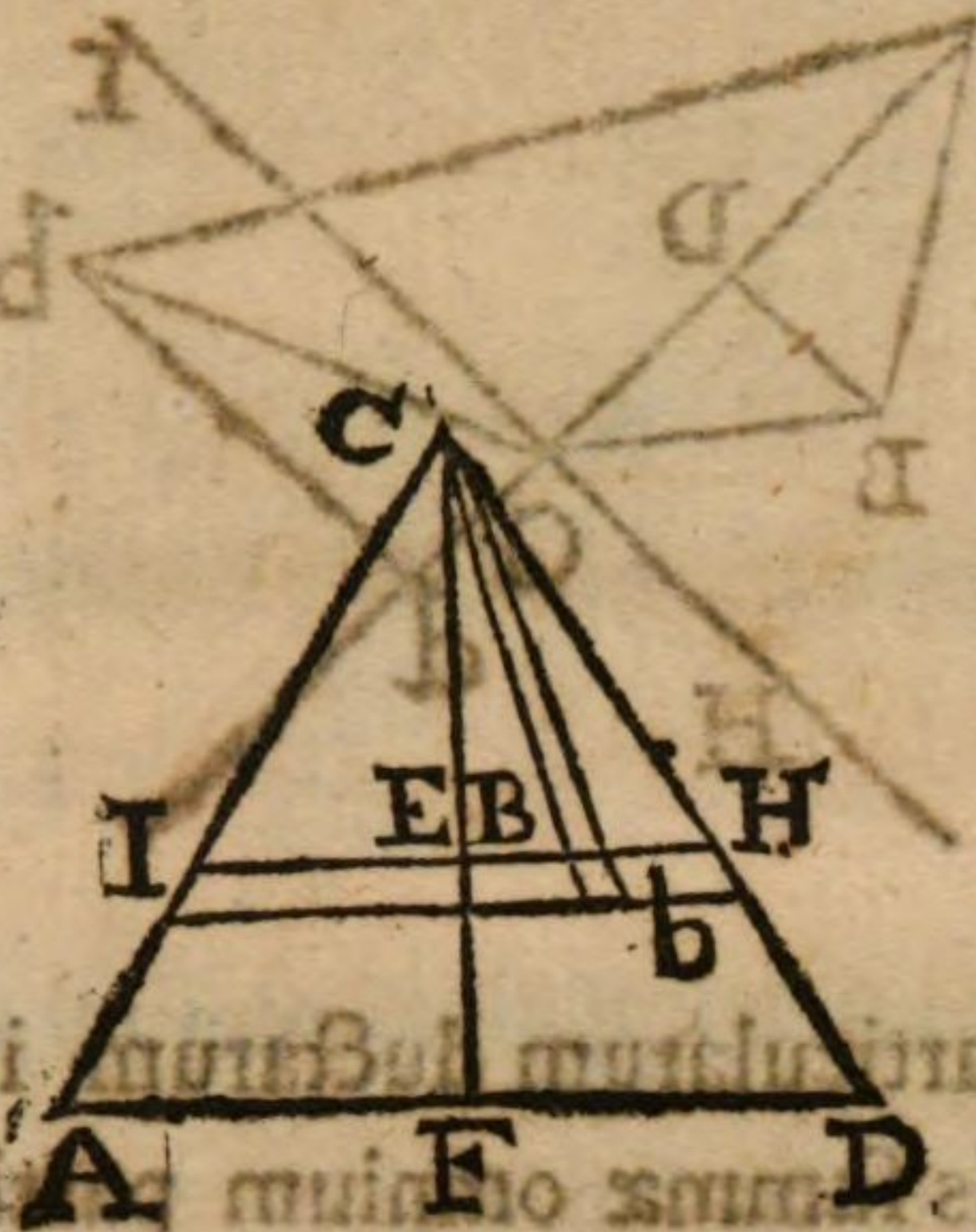
$$CA \left(= \frac{Q}{P \times CG} \right) = CG + \frac{D}{P \times CG}.$$

C O R O L L. II.

Hinc est $GA = \frac{D}{P \times CG}$. Unde data directione Axis Oscillationis respectu figuræ corporis propositi, dabitur productum $CG \times GA$ ($= \frac{D}{P}$). Adeoque dato centro oscillationis in uno casu ejusdem directionis Axis, dabitur idem in omnibus aliis, absque ulteriori calculo.

In

In casu aliquo proposito calculus institui potest, vel per inventionem ipsius Q ex commoda assumptione puncti C, vel per inventionem ipsius D, prout commodius videbitur.



E X E M P. I.

Inveniendum sit centrum oscillationis Coni recti geniti per rotationem trianguli Isoscelis ACD circa perpendicularum CF, & dependentis ab ipsius vertice C. Duc basi parallelam IEH occurrentem ipsis CA, CF, CD, in I, E, H; & sint $CF = a$, $FD = c$, $CE = z$, adeoque $EH = \frac{cz}{a}$, & in recta

EH sumpto quovis puncto B, sit $EB = x$. Tum si particulae prismatice p puncto B insistentis basis sit zx (= parallelogrammo Bb) ejusdem altitudine existente $2\sqrt{EH^2 - xx}$, erit particula ipsa $p =$

$2zx\sqrt{EH^2 - xx}$, atque $p \times CB^2 = 2CE^2 \times zx\sqrt{EH^2 - xx} + 2xxxz \times \sqrt{EH^2 - xx}$. Et hæc est fluxio summæ omnium $p \times CB^2$ in recta IH.

Sed si pro Area circuli cujus diameter est IH scribatur A, erit hujus fluens totalis adjacens rectæ IH æqualis $\frac{4aa + cc}{4aa} \cdot z z^2 A$ (per Quad.

Curvarum: nam in hoc casu sumuntur CE, EH, & z pro datis, & est $CE : EH :: a : c$.) Et hujus fluens totalis est summa omnium $p \times CB^2$ in tota figura. Sed est area A ut z^2 . Sit ergo $A = nz^2$,

& sumendo fluentem fiet $Q = \frac{4a^2 + c^2}{20} n^3 a^3$. Distantia autem centri gravitatis a vertice C est $\frac{3}{4} a$ [= CG], atque magnitudo Coni est $\frac{na^3}{3}$ [= P]; unde fit $CG \times P = \frac{na^4}{4}$, adeoque distantia centri

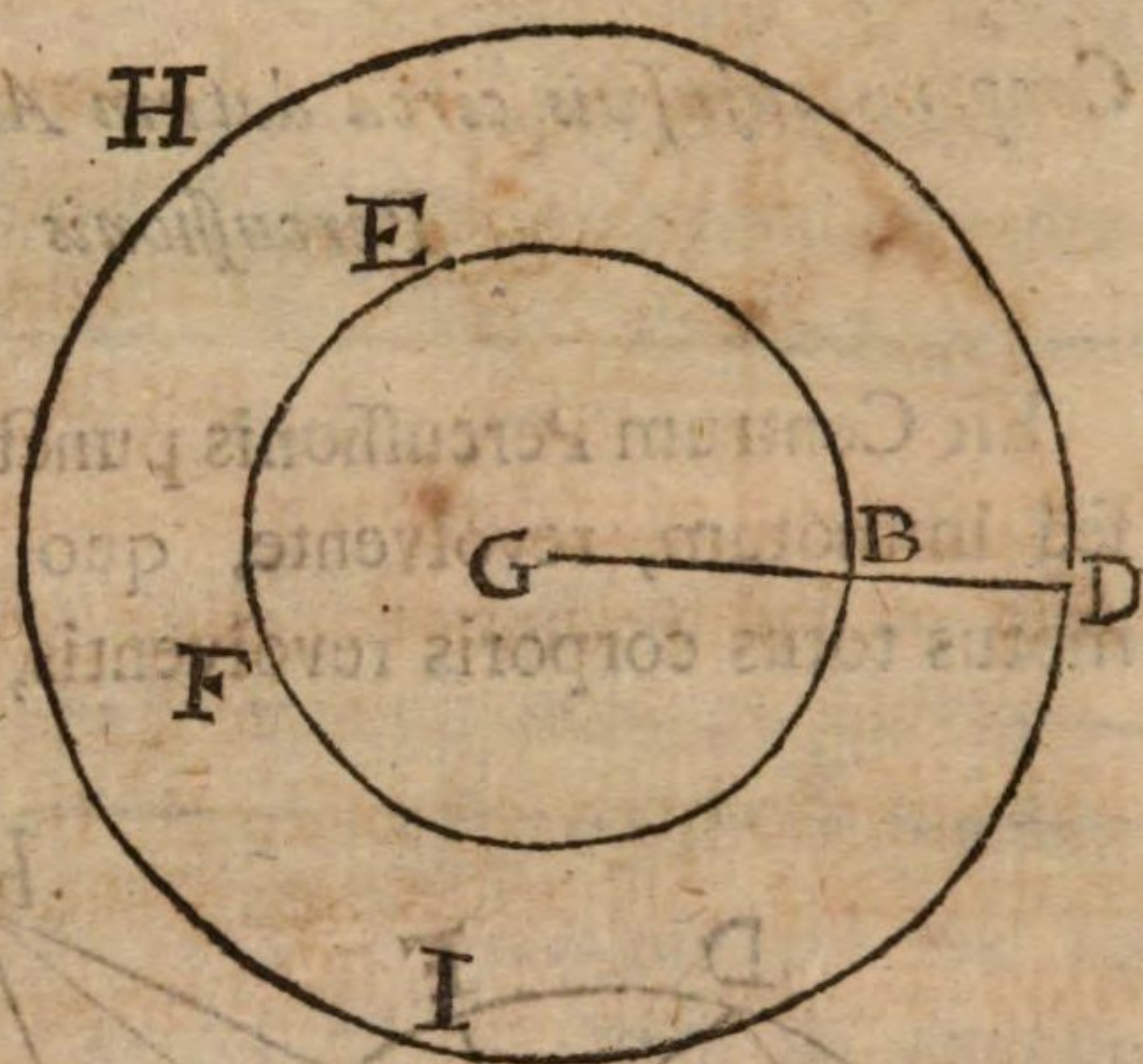
Oscillationis a puncto suspensionis C est $\frac{4a^2 + c^2}{5a}$ [= CA = CG +

$$+ \frac{D}{CG \times P} = \frac{3}{4}a + \frac{4D}{3aP}.] \text{ Unde etiam fit } \frac{D}{P} = \frac{3a^2 + 12c^2}{80}$$

$$(\text{=} \frac{3CF^2 + 3AD^2}{80}.)$$

E X E M P. II.

Sit figura proposita Sphæra. In hac figurâ calculus commodissimè procedit per inventionem ipsius D , seu summæ omnium $p \times GB^2$. Sit ergò G centrum Sphæaræ, DHI circulus maximus, & fit Sphæaræ radius $GD = a$. Centro G & radio quovis GB describe circulum BEF , & fit $GB = z$, & circumferentia $BEF = nz$. Tum summa omnium $p \times GB^2$ in circumferentia BEF erit æqualis eidem circumferentiæ ductæ in altitudinem particulæ in B ductæ in GB^2 , hoc est $2nz^3 \sqrt{a^2 - z^2}$. Est ergò summa omnium $p \times GB^2$ in tota Sphæra æqualis fluenti ipsius $2nz^3 \sqrt{a^2 - z^2}$, hoc est, $\frac{4}{15}na^5$ [= D]. Sed est ipsa Sphæra æqualis $\frac{2}{3}na^3$ [= P]; Unde fit $\frac{D}{P} = \frac{2}{5}a^2$.



S C H O L I U M.

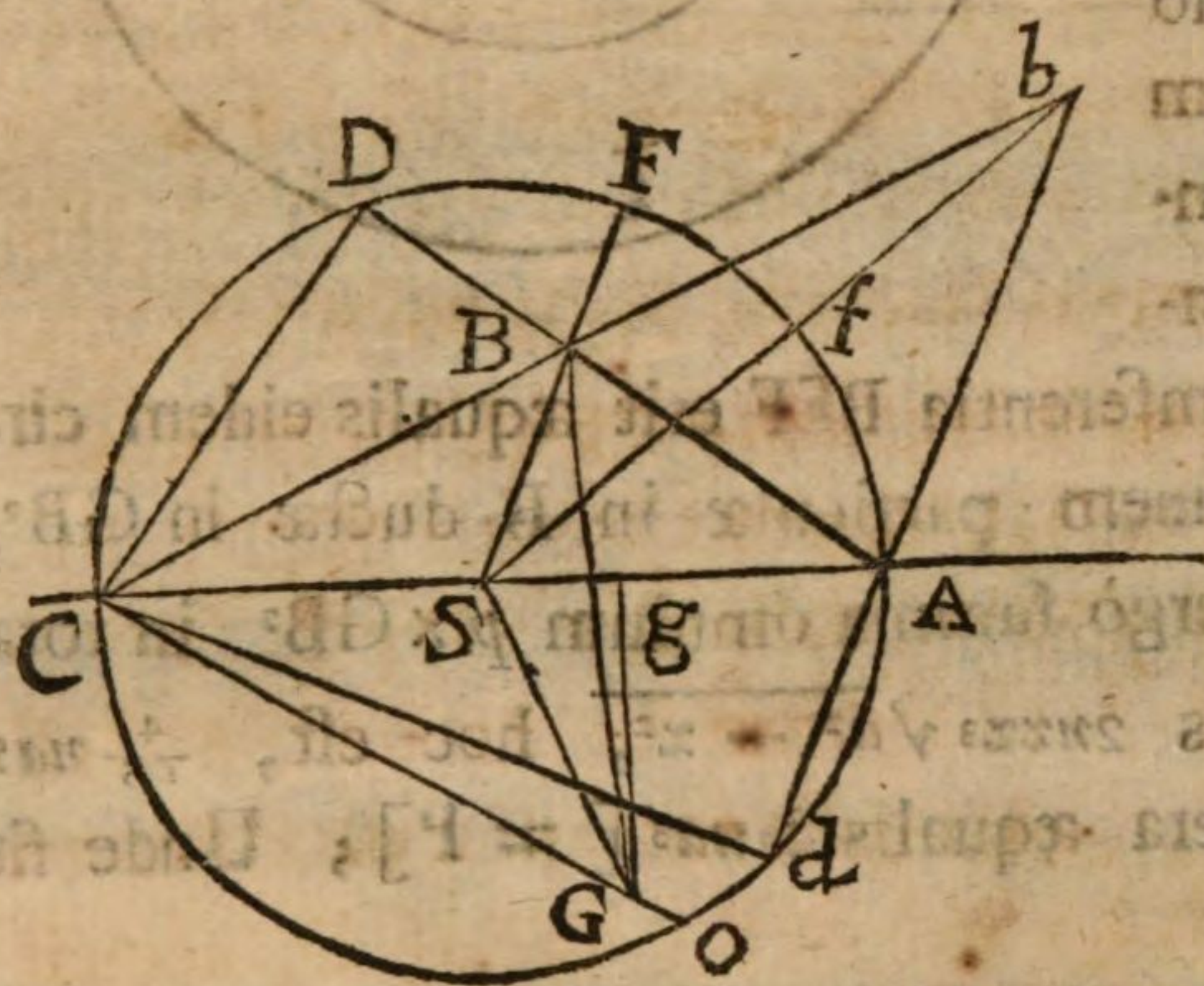
Per argumentationem in hac Propositione, corporis oscillantis motus, tam respectu virium, quam respectu velocitatis, idem est, ac foret motus particulæ æqualis summæ omnium $p \times \frac{CB^2}{CA^2}$ (hoc est particulæ $\frac{CG^2 \times P_2}{Q}$), oscillantis ad distantiam CA . Adeoq; vice corporis cujusvis oscillantis substitui potest hujusmodi particula sita in ejusdem centro Oscillationis. Ubi ergo quæritur corporum plurium

centrum Oscillationis commune, convenit singulorum centra Oscillationis seorsim quærere, & in iis substituere hujusmodi particulas vice corporum ipsorum, atque deinde quærere centrum commune oscillationis per principia hujus calculi.

PROP. XXV. PROB. XX.

Corporis cujusvis circa datum Axem revolvantis invenire Centrum Percussionis in recta data.

Est Centrum Percussionis punctum in corpore circa axem mobilem, sed immotum, revolvente, quo in obstaculum impingente sistitur motus totus corporis revolvantis, ita ut nec huc neq; illuc inclinet.



Constat hujusmodi puncti locum esse in plano motus centri gravitatis; nam elementi cujusvis prismatici huic plano normalis, adeoque axi revolutionis paralleli, motus, cum sit sibi semper parallelus, momenta ex utraq; parte hujus plani erunt æqualia; adeoque per resistentiam in eo factam fisti

potest motus totus corporis revolvantis.

Sit ergò C intersectio axis revolutionis cum plano motus centri gravitatis G, & quæratur centrum percussionis in recta CS transeunte per punctum C, & sit punctum illud quæsitum A. Diametro CA describe circulum CDA *d*, cujus centrum sit S; & sumptis punctis duobus, B intra circuli peripheriam, & *b* extra eandem, iis insistant particulae duae prismaticae *p* axi revolutionis parallelæ. Duc AB, SB, Ab, Sb, circulo occurrentes in D, F, *d*, *f*, & duc CB, C*b*, CD, C*d*.

Ob

Ob motum revolutionis, punctorum velocitates absolutæ, in directionibus ipsis CB , Cb normalibus, sunt ut distantia CB , Cb . Quare impingente corpore in punctum A , particularum velocitates ad trahendum spatium circum A in partes contrarias per radios AB , Ab erunt ut rectæ BD , bd . Vires ergo absolutæ particularum in extremitatibus radiorum AB , Ab , sunt ut $p \times DB$, & $p \times db$; & harum virium efficaciam ad corpus trahendum in partes contrarias circum A , sunt ut $p \times DB \times BA$, & $p \times db \times bA$. Ergo per conditiones Problematis, debet summa omnium $p \times DB \times BA$ intra circulum æquari summæ omnium $p \times db \times bA$ extra circulum.

Sed ex naturâ circuli est $DB \times BA = SF^2 - SB^2 = SA^2 - SB^2$, atque $db \times bA = Sb^2 - SA^2$. Unde est summa omnium $p \times SA^2 - p \times SB^2$ intra circulum æqualis summæ omnium $p \times Sb^2 - p \times SA^2$ extra circulum. Quare transferendo omnes terminos $p \times SA^2$ ad unam partem æquationis, & terminos $p \times SB^2$, $p \times Sb^2$, ad alteram partem, erit summa omnium $p \times SA^2$, tam intra quam extra circulum in universo corpore, æqualis summæ omnium $p \times SB^2$, etiam in universo corpore. Sed ductis SG & GB , & pro Corporis magnitudine scripto P , erit summa omnium $p \times SB^2$ æqualis $P \times SG^2$ plus summâ omnium $p \times GB^2$ (per *Cor. 1. Prop. 24.*) Item ob datum SA^2 , est summa omnium $p \times SA^2 = P \times SA^2$. Proinde pro datâ summâ omnium $p \times GB^2$ scripto D , erit $P \times SA^2 = P \times SG^2 + D$, hoc est $SA^2 - SG^2 = \frac{D}{P}$.

Ad CA duc normalem Gg , & duc CG ; atque erit $SG^2 = CG^2 - CA \times Cg + SA^2$, adeoq; $SA^2 - SG^2 = CA \times Cg - CG^2$, hoc est

$$CA \times Cg - CG^2 = \frac{D}{P}, \text{ seu } CA = \frac{CG^2}{Cg} + \frac{D}{P \times Cg}.$$

Dantur autem omnes CG , Cg , P & D ; quare etiam datur punctum A .
Q. E. I.

COROLLARIUM.

Hinc est CA ad CG + $\frac{D}{P \times CG}$ ut CG ad Cg. Quare si recta CG occurrat circulo in O, existente angulo ad O recto, adeoque & triangulis CAO, CGg similibus, erit $CO = CG + \frac{D}{P \times CG}$. Unde (per Cor. 1. Prop. 24.) est O centrum Oscillationis. Proinde per centrum rotationis C ductâ rectâ ad centrum Oscillationis O, ei perpendicularis OA erit locus centri Percussionis. Invenitur itaq; centrum Percussionis per calculum centri Oscillationis.

LEMMA XI.

In Curva Logarithmica subtangens datur. Et si sit numerus y,

Logarithmus z & Subtangens illa c, erit $\frac{y}{y} = \frac{z}{c}$.

Hoc ab aliis passim demonstratur.

HYPOTHESIS I.

Densitas Aeris est oneri imposito proportionalis.

Hoc Experimentis confirmatur.

HYPOTHESIS II.

Vis Gravitatis est reciprocè in duplicatâ ratione distantiarum a Centro Terræ.

Demonstratur hoc a priori inter Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica.

PROP.

P R O P. XXVI. P R O B. XXI.

Invenire Densitatem Atmosphaera.

Sit S centrum Terræ, & per circulos BCD , bcd centro S descriptos, repræsententur superficies duæ sphaericæ ipsi Terræ concentricæ in Aere descriptæ.

Tum superficies BCD sustinebit pressionem columnæ Aeris, cujus basis est eadem superficies atque altitudo æquatur altitudini BI totius Aeris supra punctum B :

(per *Prop. 20. Lib. 2. Princip. Math.*) Pressio itaque in superficie datam partem BP est ut columna Aeris totius altitudinis

BI datæ basi insistentis. Sit itaq; $bp = BP$, atque erit differentia pressionum in bases BP & bp , ut pondus aeris datæ basi insistentis, inclusi inter altitudines SB & Sb . Sit itaque $SB = x$, atque imminutâ

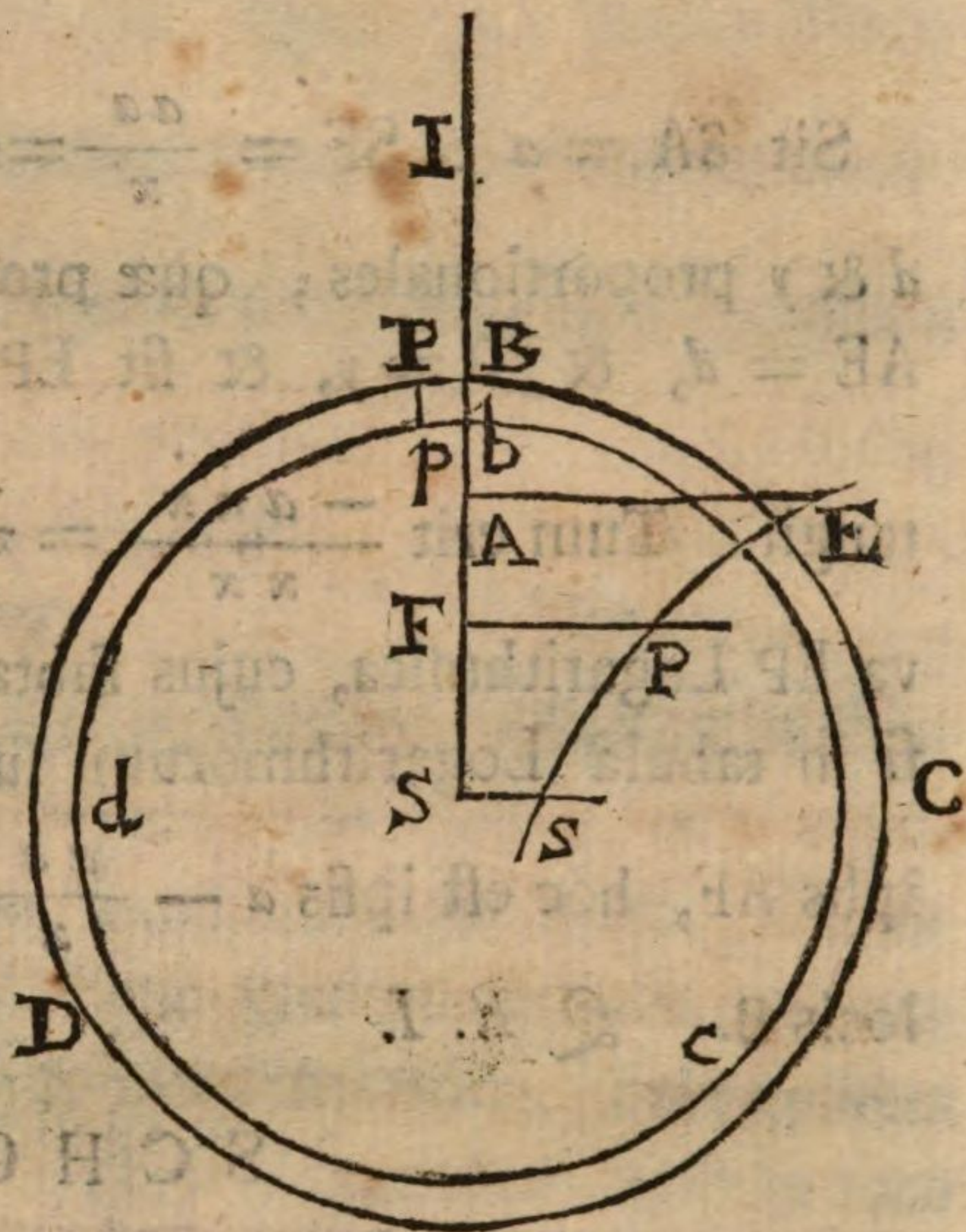
distantiâ Bb in infinitum, sit $Bb = x$, & y densitas Aeris in B , & sit a data distantia a centro S , ad quam distantiam sit gravitas = 1 &

densitas d . Tum quantitas aeris in spatio $BPpb$ erit ut $x y$ (nempe ut magnitudo in densitatem,) atque vis gravitatis in B erit

$\frac{a a}{x x}$ (per *Hyp. 2*) adeoq; pondus aeris inter B & b erit ut $\frac{a a x y}{x x}$.

(hoc est, ut quantitas materiæ in gravitatem.) Descendendo ergo

versus centrum Terræ, erit incrementum pressionis ut $\frac{a a x y}{x x}$.



Sed est densitas y pressioni proportionalis (per *Hypoth.* 1.) quare est

y ut $\frac{a^2 x y}{x^2}$. Sit ergo c linea data, atq; erit $y = - \frac{a^2 x y}{c x^2}$, seu

$$\frac{y}{y} = - \frac{a^2 x}{c x^2}.$$

Sit $SA = a$ & $SF = \frac{aa}{x} = z$, atq; ad A & F erige normales ipsis d & y proportionales; quæ proinde per eas designari possunt, ut sit $AE = d$, & $FP = y$, & sit EP curva quam punctum P perpetuò tangit. Tum erit $\frac{aa x}{x x} = z$, adeoq; $\frac{y}{y} = \frac{z}{c}$. Unde est curva EP Logarithmica, cujus subtangens est c (per *Lem.* 11.) Adeoq; si in tabulâ Logarithmorum sumantur Logarithmi proportionales ipsis AF , hoc est ipsis $a - \frac{aa}{x}$, Numeri erunt ut densitates in locis B . *Q. E. I.*

SCHOLIUM.

Si Aeris totius pondus supra B sit p (per hanc *Prop.*) erit p ad p ut y ad y . Sed est $p = \frac{aa x y}{x x}$ (per hanc *Prop.*) Quare si sit $p = \frac{aa y}{x x} A$, hoc est, si p sit columna Aeris ejusdem densitatis y & gravitatis $\frac{aa}{x x}$ ac Aer in B , & altitudinis A , erit y ad y ut A ad x , hoc est, ut c ad $\frac{a^2 x}{x^2}$ (per hanc *Prop.*) Unde fit $c = \frac{aa}{x x} A$. Inventâ itaq; altitudine A per Experimentum *Torricellianum*, dabitur c .

Sed per Experimentum quoddam ab *Haukesbeio* factum, constat Aeris densitatem mediocrem esse ad densitatem Aquæ ut 1 ad 820 ferè.

ferè. Est etiam densitas Aquæ ad densitatem Mercurii ut 1 ad $13\frac{1}{2}$. Quare est densitas Aeris ad densitatem Mercurii ut 1 ad 11070. Altitudo etiam Barometri mediocris est 30 *unc.* Quare si punctum B sumatur in superficie Terræ, existente *a* radio Terræ, erit altitudo A, (adeoq; subtangens *c*) = 332100 *unc.* vel 27675 *ped. Anglic.* Est etiam Radius Terræ pedum 20995444. Quare pro Radio Terræ

scripto 1, erit $c = \frac{27675}{20995444}$, vel satis accurate in numeris mino-

ribus $\frac{1}{760}$. Et hinc respectu Logarithmorum communium, in quibus

est 1 *Log.* ipsius 10, est Pes Anglicanus partium 0.00001569

Mille passus Anglican. 0.082856 ..

Radius Terræ 329.47

Ex hac Propositione constat, Aeris densitatem, etiam ad distantiam infinitam a Centro Terræ, esse quantitatis finitæ; nam exponitur ea per Logarithmicæ ordinatam *Ss* ad Centrum Terræ. Proinde si Aeris vis elastica tanta sit, ut ad hunc gradum raritatis pervento etiam adhuc sit densitas compressioni proportionalis, Atmosphæra Terræ vere in infinitum extendetur, atque erit quantitas Aeris in toto Systemate Mundano vere infinita; utpote quæ major sit quam totum spatium infinitum ductum in datam densitatem *Ss*. Sed vires naturales non in infinitum extenduntur: quare plusquam probabile est, Aeris vim elasticam, postquam ad certum gradum raritatis perventum est, subinde continuò languescere, adeoque densitatem subinde decrescere in ratione continuò minori quam ponderis imminuti, atque Atmosphæram eo pacto revocari intra limites finitos, eosque fortasse satis arctos.

HYPOTHESIS III.

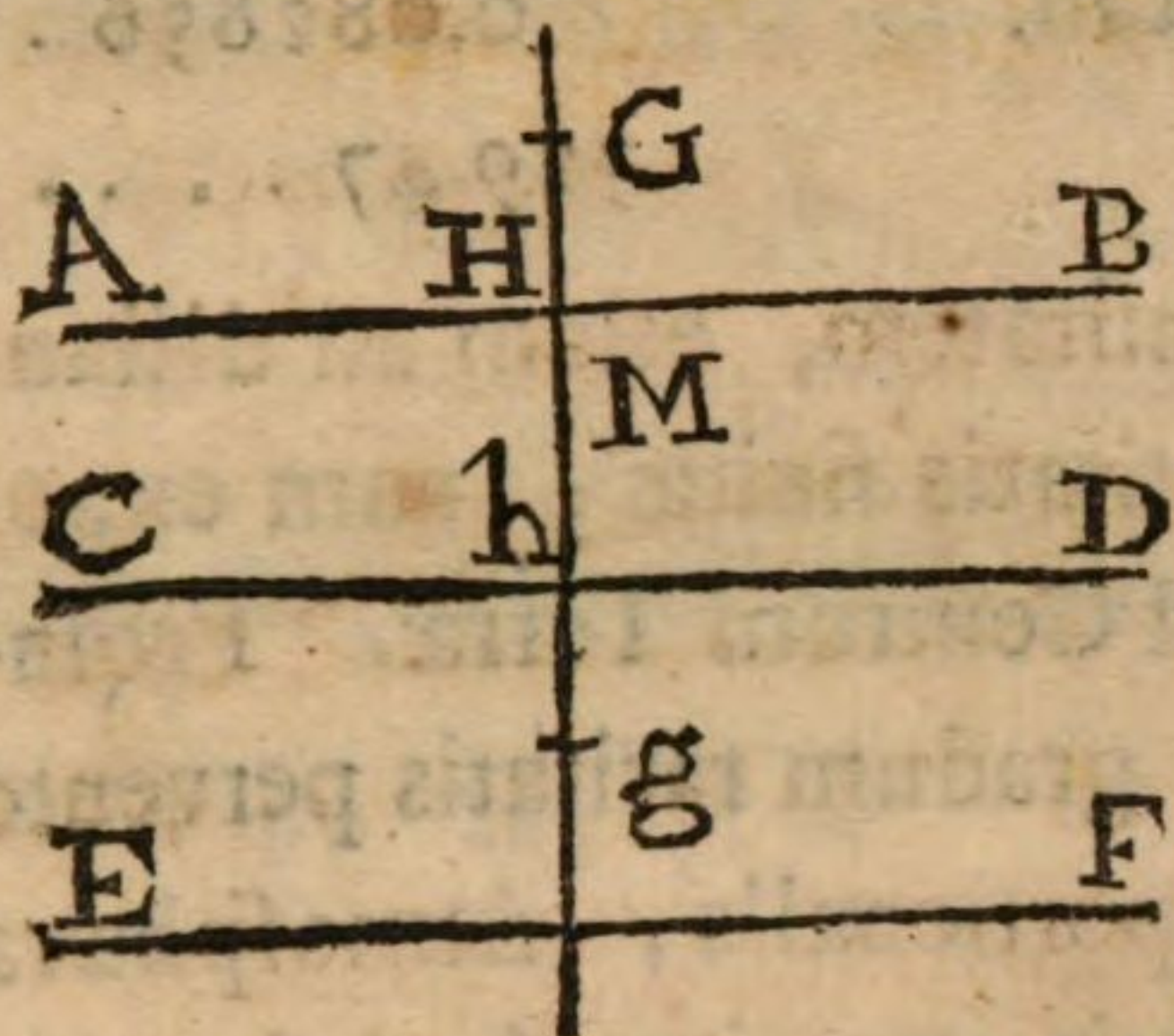
Radii Lucis constant ex particulis corporeis, atque Refractio Lucis fit per attractionem mutuam Lucis & Mediorum refringentium, atque hæc Attractio decrescit in tam magna ratione distantiarum a corporibus, ut non sit sensibilis, nisi in ipso ferè contactu; estque cæteris paribus, ut corporum densitas.

Hæc

Hæc omnia abunde comprobantur in Libro Opticorum Newtoni.

LEMMA XII.

Si sint Media plura similaria, planis parallelis ab invicem distincta, quorum vires attractrices sunt tantum in distantis minimis sensibiles; corporis per Media ista transeuntis velocitas, ubi in Medium aliquod pervenerit, eadem erit, ac si per Media jam præterita non transiisset, sed cum primâ suâ velocitate directè incidisset in vires attractrices istius Medii, in quo jam versatur.



Distinguantur duo quævis Media contigua planis per rectas parallelas AB, CD, EF repræsentatis, atq; ducatur istis normalis GHbg occurrens AB & CD in H & h. Sume hinc inde HG & hg æquales distantis in quibus incipit ac desinit attractio Medii ABDC. Tum quoniam Mediorum actio est uniformis, quantum motus additur corpori pergenti de G versus M, tantum auferitur per contrariam actionem ejusdem medii eodem perveniente in g; atque idem eveniet in transitu corporis per media reliqua. Restat ergò ut omnis mutatio motus ubi corpus pervenerit in g, oriatur ex solâ actione medii CDEF, in quo jam versatur.

COROLLARIUM.

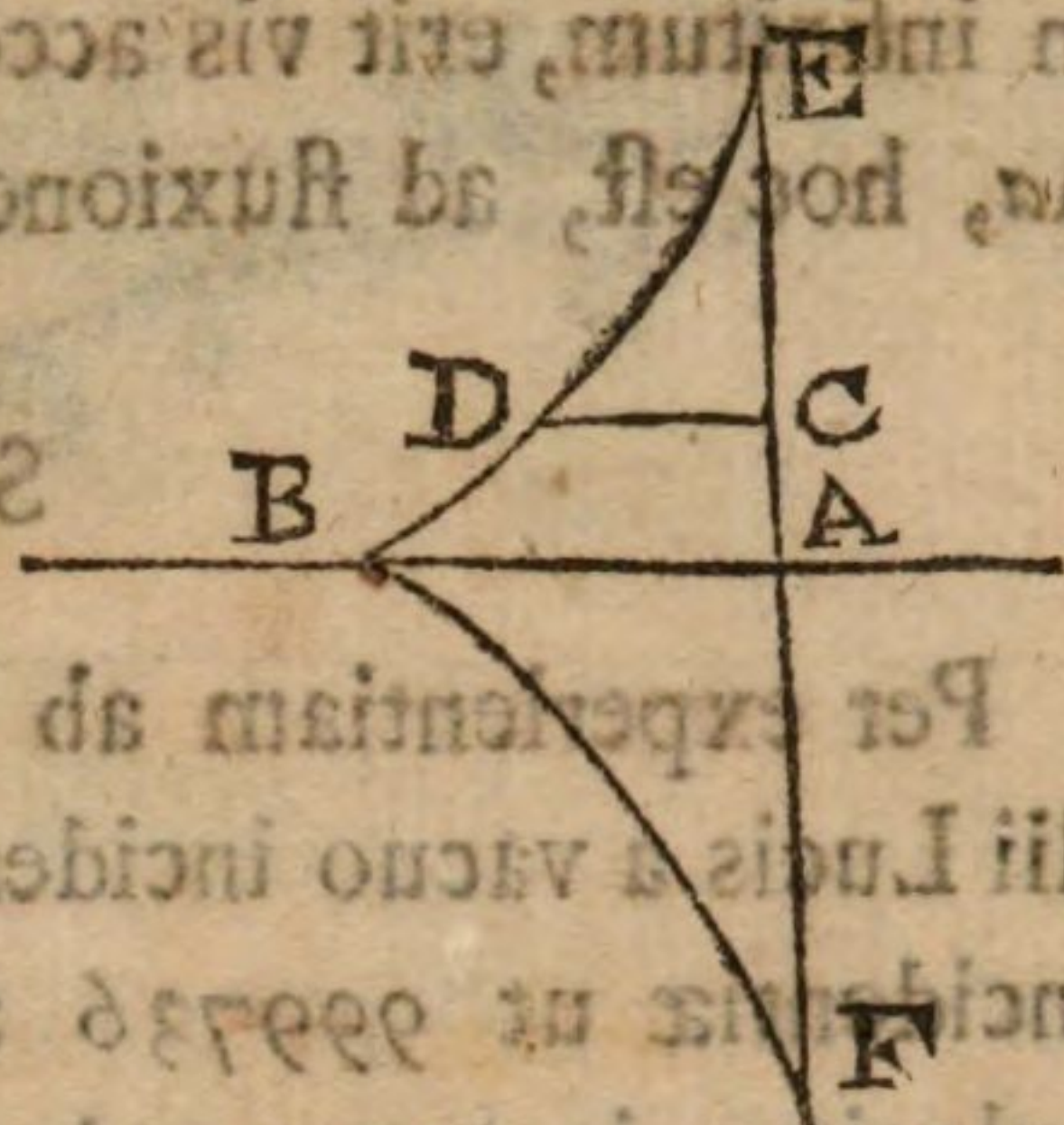
Hinc motus Lucis in Medio aliquo idem est, five in illud primùm inciderit, five per alia Media jam transierit, (per Hypoth. 3.)

LEMMA XIII.

Si in datis distantis Mediorum Vires attractrices sunt ut ipsorum Densitates, erit Lucis velocitas in Medio in dimidiata ratione densitatis Medii quantitate data auctæ.

Sic

Sit AB superficies Medii jacentis ad partes F. Duc EAF ipsi AB normalem, atque ad punctum C in rectâ EA erige normalem CD proportionalem Medii vi attractrici in C, atq; fit EDBFE area tota quam describit ordinata CD. Tum erit incrementum quadrati velocitatis particulæ transeuntis per totam regionem attractionis Medii EF, ut spatium totum EDBF (per *Propp. 39 & 40. Lib. I. Princip. Math.*) Sed quoniam, ex hypothesi, Attractiones in datis distantis sunt ut Denfitates Mediorum, ergo sunt area integræ EDBFE ut eadem denfitates; adeoque incrementum quadrati velocitatis est ut Medii denfitas. Si itaque quadratum velocitatis datæ in vacuo, ante ingressum in spatium EF, sit ad incrementum ejusdem in transitu per hoc spatium, ut data quantitas ad denfitatem in uno casu, erit semper quadratum velocitatis datæ in vacuo ad ejusmodi incrementum, ut idem Datum ad denfitatem: adeoque conjunctim quadratum velocitatis post transitum per spatium EF erit ad quadratum velocitatis datæ in vacuo, ut denfitas plus dato ad datum; & proinde ipsæ velocitates erunt in hac ratione dimidiatâ; adeoque velocitas in Medio est semper in dimidiatâ ratione denfitatis plus dato. Q. E. D.



COROLLARIUM.

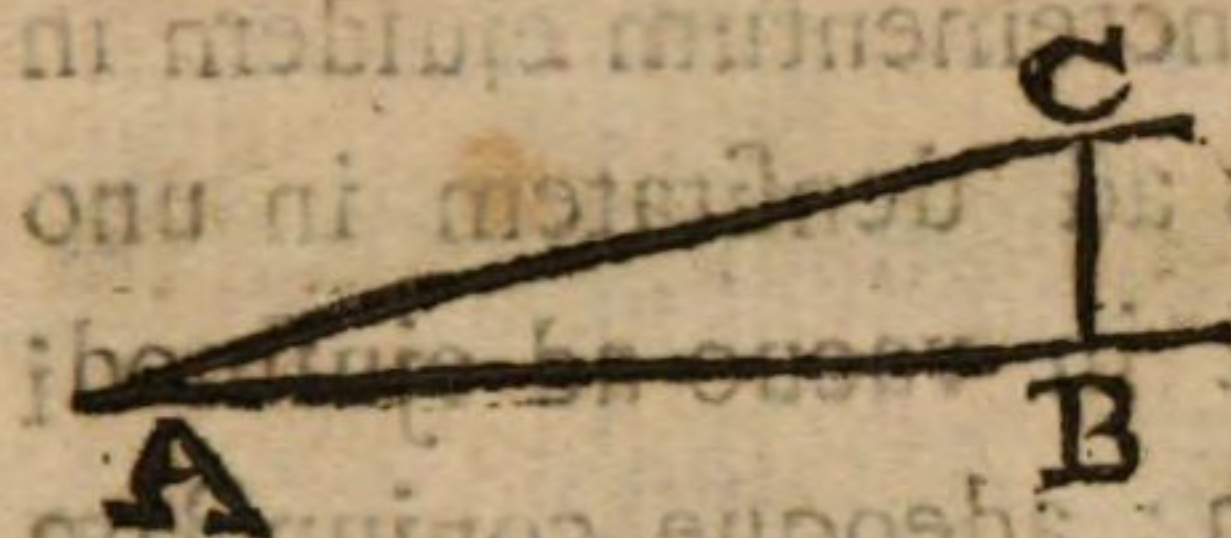
Hinc in transitu Lucis per Medium inæqualiter densum, qualis est Atmosphæra Terræ, Vis acceleratrix est ut fluxio denfitatis applicata ad fluxionem distantia inter denfitates. Nam fit Aa linea in cujus directione variatur denfitas, & sint ordinatæ AB, ab ut vires acceleratrices in A & a, & fit Bb curva quam describit punctum B. Tum erit area ABba ut incrementum quadrati velocitatis particulæ pergentis de A in a, (per *Prop. 39. Lib. I. Princip. Math.*) hoc est, ut incrementum



mentum densitatis (per hoc *Lemma*). Quare imminutâ distantia Aa in infinitum, erit vis acceleratrix AB ut fluxio densitatis applicata ad Aa , hoc est, ad fluxionem distantia inter densitates.

SCHOLIUM.

Per experientiam ab *Haukesbeio* factam, est sinus refractionis Radii Lucis a vacuo incidentis in Aerem ad superficiem Terræ, ad sinum incidentia ut 999736 ad 1000000. Ergo in hac ratione est Lucis velocitas in vacuo ad ejusdem velocitatem in Aere ad superficiem Terræ. (per *Prop. 95. Lib. I. Princip. Math.*) Sit ergo 1 quantitas data, atque repræsentetur densitas Aeris ad superficiem Terræ per d : rum (per hoc *Lem.*) erit $1 : \sqrt{1 + d} :: 999736 : 1000000$, adeoque $d = 0.00052828$.



Et in genere, si Aeris densitas designetur per y , & constituatur triangulum rectangulum ABC , cujus basis AB sit ad hypotenusam AC , ut sinus refractionis ad sinum incidentia a vacuo, datâ basi AB erit perpendiculum BC ut $\sqrt{y}$.

PROP. XXVII.

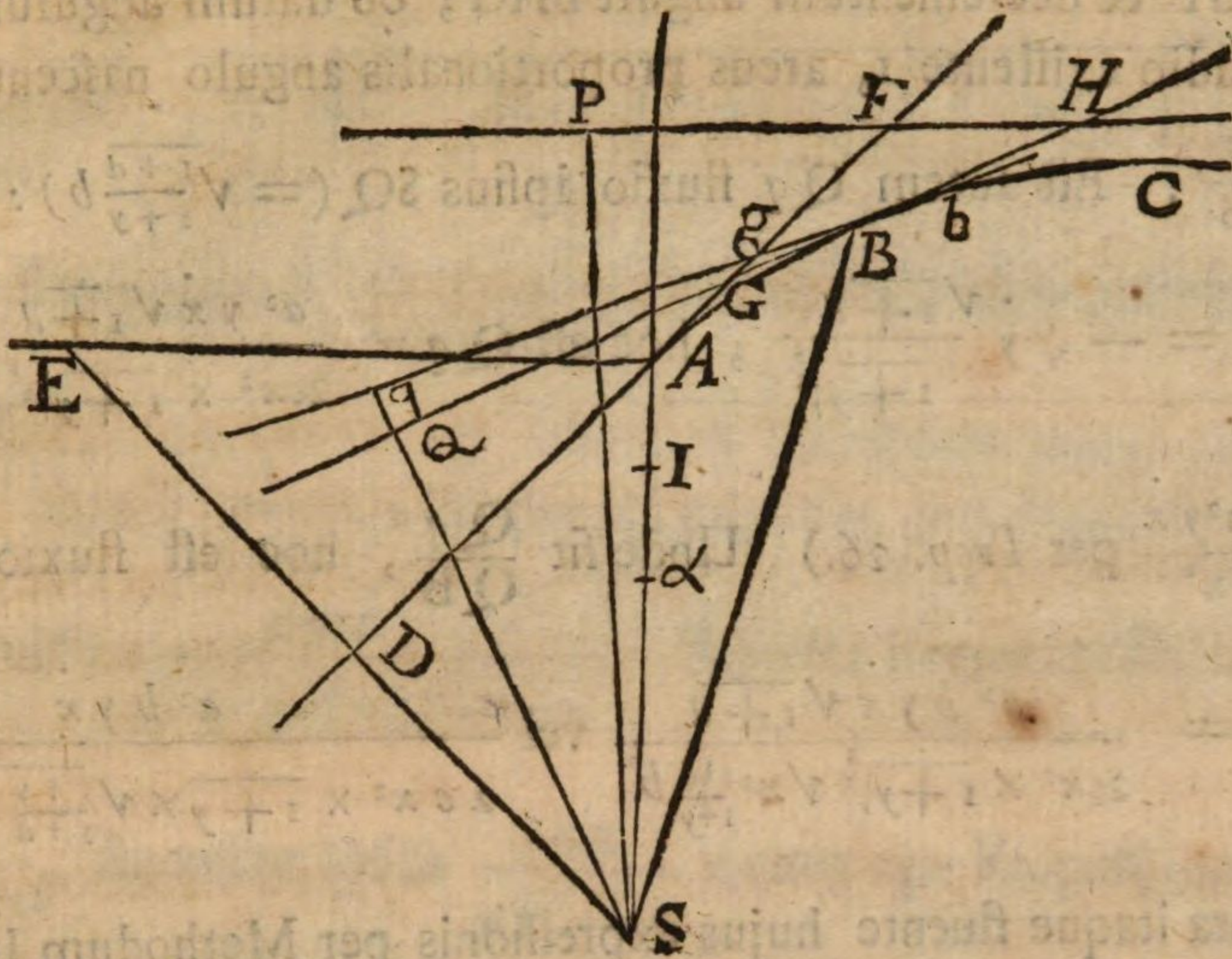
PROB. XXII.

Invenire Refractionem Lucis per Atmospheram Terræ transeuntis.

Sit S Centrum Terræ, ABC Radius Lucis incurvatus, quem tangent rectæ AG ; BG in A & B , sibi mutuo occurrentes in G , atque ad tangentes demittantur perpendiculares SD , SQ , & ducantur SA , SB , atque ad A ducatur ipsi SA normalis AE occurrens SD in E , & sit A punctum in Radio datum, B punctum variabile. Et sint

$SA = a$, $SD = b$, $SE = t (= \frac{a a}{b})$, $SB = x$, d densitas in A , y densitas in B .

Cur:



Curvatura Radii pendet ab Aeris vi refringente attractrice, (per *Hypoth.* 3) quæ semper dirigitur versus majorem densitatem, hoc est, versus Centrum Terræ, (per *Prop.* 26.) Est ergo hæc Curva de genere Trajectoriarum genitarum per vires Centripetas.

Est autem velocitas Lucis in A ad velocitatem in B ut $\sqrt{1+d}$ ad $\sqrt{1+y}$ (per *Lem.* 13.) Quare est $SQ : SD :: \sqrt{1+d} : \sqrt{1+y}$

(per *Cor.* 1. *Prop.* 1. *Lib.* I. *Princ.* *Math.*) Unde est $SQ = \frac{\sqrt{1+d}}{\sqrt{1+y}} b$, a.

deoque $BQ = \sqrt{x^2 - \frac{1+d}{1+y} b^2}$. Et hinc, ubi punctum B est infinite distans, pœnè evanescente y, ita ut tutò negligi possit, erit perpendicularis ad tangentem jam factam Asymptoton, $= \sqrt{1+d} \times b$. Sit Asymptotos illa PH, occurrens tangentibus AG, BG in F & H, existente eidem perpendiculari SP.

Moveatur tangens BG in locum novum proximum bg occurrentem perpendiculari SQ in q . Tum erit angulus nascens g BG fluxio anguli FGH vel anguli FHG; hoc est, crescente x , incrementum anguli

guli HGF & decrementum anguli FHG; ob datum angulum ad F. Atque radio existente 1, arcus proportionalis angulo nascenti QBq

est $\frac{Qq}{QB}$. Est autem Qq fluxio ipsius SQ ($= \sqrt{\frac{1+d}{1+y}} b$): quare

$$\text{est } Qq = -\frac{1}{2} y \frac{\sqrt{1+d}}{1+y} \dot{y}; \text{ hoc est } Qq = \frac{a^2 y \dot{x} \sqrt{1+d}}{2cx^2 \times \frac{1}{1+y}} b, \text{ (ob}$$

$\dot{y} = \frac{-a^2 y \dot{x}}{c x^2}$ per Prop. 26.) Unde fit $\frac{Qq}{QB}$, hoc est fluxio anguli

$$FGH = \frac{a^2 b y \dot{x} \sqrt{1+d}}{2cx^2 \times \frac{1}{1+y} \sqrt{x^2 \frac{1+d}{1+y}} b^2} \text{ vel } \frac{a^2 b y \dot{x}}{2cx^2 \times \frac{1}{1+y} \times \sqrt{\frac{1+y}{1+d} x^2 - b^2}}$$

Inventa itaque fluente hujus expressionis per Methodum Inversam Fluxionum, dabitur angulus FGB. Sed datur angulus GBS per valorem perpendicularis SQ, atq; est angulus SDG rectus; unde dabitur angulus DSB. Adeoq; ex datâ distantia SB ($=x$), densitate in B ($=y$), & angulo SAD, dabitur positio rectæ SB, adeoq; punctum B; hoc est, dabitur figura Radii refracti ABC. Q. E. I.

Sed hæc fluxio $\frac{a^2 b y \dot{x}}{2cx^2 \times \frac{1}{1+y} \sqrt{\frac{1+y}{1+d} x^2 - b^2}}$ ad fluentem in terminis

numero finitis irreducibilis est. Quare ad computandam Atmosphæræ refractionem in usus Astronomicos, quærenda est series, quæ sit apta ad calculum instituendum per approximationes. Ergò ut fluxio hæc revocetur ad terminos quantum fieri potest simplicissimos, pro x

scribe $\frac{aa}{z}$, atque fluxio fiet $\frac{-by\dot{z}}{2c \times \frac{1}{1+y} \sqrt{\frac{1+y}{1+d} \frac{a^4}{z^2} - b^2}}$, vel

$$\frac{-yz\dot{z}}{2c \times \frac{1}{1+y} \sqrt{\frac{1+y}{1+d} \frac{a^4}{b^2} - z^2}}, \text{ h. e. (neglecto signo) } \frac{yz\dot{z}}{2c \times \frac{1}{1+y} \sqrt{\frac{1+y}{1+d} t^2 - z^2}}$$

existente

existente etiam $\dot{y} = \frac{y \dot{z}}{c}$. Sed ad superficiem Terræ, ubi est $y = d$,

est hæc fluxio $\frac{y z \dot{z}}{2c + 2cd \sqrt{tt - zz}}$; & ad distantiam infinitam (ubi

etiam fluxio ipsa evanescit,) differt ab hac forma minus parte mil-
lesimâ. Quare neglectis istiusmodi minutiis, pro Fluxione illa tutò

sumi poreft $\frac{y z \dot{z}}{2c + 2cd \sqrt{tt - zz}}$. Seposito itaque coefficiente dato

$\frac{1}{2c + 2cd}$ fluentem ipsius $\frac{y z \dot{z}}{\sqrt{tt - zz}}$ quæro ope Propositionis unde-
cimæ, ut sequitur.

Pro $\sqrt{tt - zz}$ scribe x , atque erit $x = \frac{zz}{x}$, & Fluxio proposita

erit $\frac{y z \dot{z}}{x}$ vel etiam $-y \dot{x}$. Est etiam $\dot{y} = \frac{y \dot{z}}{c}$. Itaque secun-

dum Prop. 11. fit $r = yz$, $s = \frac{z}{x}$, $\dot{w} = \dot{z} = \frac{-x \dot{x}}{z}$. Tum capi-

endo fluxiones, easque continuò applicando ad w , erit $\dot{s} = \frac{z^2}{x^3} +$

$\frac{1}{x} = \frac{tt}{x^3}$, $\ddot{s} = \frac{3z^3}{x^5} + \frac{3z}{x^3} = \frac{3ttz}{x^5}$, $\ddot{\ddot{s}} = \frac{15z^4}{x^7} + \frac{18z^2}{x^5} +$

$\frac{3}{x^3} = \frac{15tttz^2}{x^7} + \frac{3tt}{x^5}$, & sic porrò. Hinc autem per formatio-

nes terminorum constat, quod si fit n distantia termini alicujus

$\dot{s}$, $\ddot{s}$, $\ddot{\ddot{s}}$, &c. a termino primo s , exprimetur $\dot{s}$, (hoc est $\dot{s}$, si n fit 1,

$\ddot{s}$ si n fit 2, &c.) vel per seriem hujus formæ,

$$\dot{s} = A \frac{z^{n+1}}{x^{2n+1}} + B \frac{z^{n-1}}{x^{2n-1}} + C \frac{z^{n-3}}{x^{2n-3}} + D \frac{z^{n-5}}{x^{2n-5}} + \&c.$$

vel per seriem hujus formæ,

$$s = t t \times A \frac{z^{n-1}}{x^{2n+1}} + B \frac{z^{n-3}}{x^{2n-1}} + C \frac{z^{n-5}}{x^{2n-3}} + \&c. \text{ Coefficientes autem}$$

A, B, C, D, &c. in harum serierum primâ investigo ad hunc modum. Juxta notationem autem nostram sint $\overset{n}{n}$, $\overset{n}{n}$, $\overset{n}{n}$, &c. valores ipsius n præcedentes, & $\underset{n}{n}$, $\underset{n}{n}$, $\underset{n}{n}$, &c. ejusdem valores subsequentes, ut in Introductione explicavimus. Capiendo fluxiones seriei, primò in x , deinde in z , & terminos prodeuntes continuo applicando ad w , erit,

$$s = \frac{n}{2n+1} A \frac{z^{n+1}}{x^{2n+1}} + \frac{n-1}{2n-1} B \left\{ \frac{z^{n-1}}{x^{2n-1}} + \frac{n-3}{2n-3} C \right\} \frac{z^{n-3}}{x^{2n-3}} + \\ + \frac{n-5}{2n-5} D \left\{ \frac{z^{n-5}}{x^{2n-5}} + \&c. \right.$$

Hinc novum A fit $\frac{n}{2n+1} A$. Unde constat ipsum A formari per continuam multiplicationem terminorum 1, 3, 5, 7, &c. quorum ultimus & maximus fit $2n-1$. In sequentibus autem vice $2n-1$ scribe m , atque erit $A = mA$.

Item per terminum secundum est $B = mB + nA$. Si fieri potest ut B producat ab A per multiplicationem & divisionem, fit

$$B = \frac{Q}{R} A. \text{ Tum erit } B = \frac{Q}{R} A = \frac{Q}{R} mA. \text{ Unde eliminatis}$$

$$B \text{ \& } B \text{ ab æquatione priori, \& simul evanescente } A, \text{ erit } \frac{mQ}{R} =$$

$$= \frac{mQ}{R} + n, \text{ hoc est } \frac{mQ}{R} + \frac{mQ}{R} = \frac{mQ}{R} + n. \text{ Ut reducetur hæc}$$

æquatio

æquatio ad terminos simplicissimos pono $\frac{m Q}{R} = \frac{m Q}{R}$, hoc

est $\frac{m}{R} = \frac{m}{R}$. Unde fit $\frac{m}{R} Q = n$. Sed est $\frac{m}{R}$ novus valor ipsius

$\frac{m}{R}$, unde est $\frac{m}{R}$ quantitas data, adeoque $R = m$, indeque $Q = n$,

& sumendo integrales $Q = \frac{n n}{2} + p$. Sed debet esse $B = 0$ ubi

$n = 0$; adeoque est $p = 0$, atque $Q = \frac{n n}{2}$. Unde fit $B = \frac{n n}{2 m} A$.

Et hinc $B = \frac{m n}{n} B$.

Per terminum tertium est $C = m C + n B$. Pono $C = \frac{Q}{R} B$,

& fit $C = \frac{Q}{R} B$, hoc est $\frac{Q m n}{R n} B = \frac{m Q}{R} B + n B$, seu

$\frac{Q m n}{n R} + \frac{m n}{n R} Q = \frac{m Q}{R} + n$. Pone $\frac{m n}{n R} = \frac{m}{R}$, hoc est,

$\frac{m n n}{R} = \frac{m n n}{R}$, ut fiat $\frac{m n}{n R} Q = n$. Sed est $\frac{m n n}{R}$ novus valor

ipsius $\frac{m n n}{R}$. Unde fit $R = m n n$, adeoque $Q = n n n$, indeque $Q =$

$\frac{n n n n}{4}$. Unde fit $C = \frac{n n}{4 m} B$, atque $C = \frac{m n}{n} C$.

Per

Per terminum quartum est $D = {}^m D + {}^n C$. Unde ad eundem

modum invenitur $D = \frac{{}^n n}{6m} C$, atque $D = \frac{{}^m n}{n}$. Ex terminis

autem jam appofitis fatis constat modus formandi ceteros. Unde si jam pro totis terminis cum suis signis scribantur A, B, C, &c. erit

$$s = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 2n-1}{x^{2n+1}} + \frac{{}^n n}{2m} \frac{x x}{z z} A + \frac{{}^n n}{4m} \frac{x x}{z z} B + \&c.$$

$$\text{hoc est } s = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 2n-1}{x^{2n+1}} + \frac{n+1 \cdot n}{2 \times 2n-1} \frac{x x}{z z} A + \frac{n-1 \cdot n-2}{4 \times 2n-3} \times \frac{x x}{z z} B + \frac{n-3 \cdot n-4}{6 \times 2n-5} \frac{x x}{z z} C + \&c.$$

Et ad eundem modum inveniuntur coefficientes in serie alterâ, ut

$$\text{fit etiam } s = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 2n-1}{x^{2n+1}} + \frac{n-1 \cdot n-2}{2 \times 2n-1} \frac{x x}{z z} A + \frac{n-3 \cdot n-4}{4 \times 2n-3} \frac{x x}{z z} B + \frac{n-5 \cdot n-6}{6 \times 2n-5} \frac{x x}{z z} C + \&c.$$

Quinetiam si jam sit m distantia termini alicujus $s, s', s'', \&c.$ a termino s , pro n scripto $-m$ exprimetur etiam s per easdem series.

In hoc autem casu inveniendus est coefficientis termini primi, ut fecimus in Propositione duodecimâ. Debet enim esse $2n-1$, hoc est $-2m-1$, maximus factorum 1, 3, 5, 7, &c. in coefficiente illo.

Et hic coefficientis sic scribi potest $\frac{2n-1 \cdot \dots \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{-1 \cdot -3 \cdot -5 \cdot \&c.}$

hoc est, $\frac{-2m-1 \cdot -2m-3 \cdot -2m-5 \cdot \&c.}{-1 \cdot -3 \cdot -5 \cdot -7 \cdot \&c.}$. Incidente autem n inter

numeros negativos, adeoq; & m inter numeros affirmativos 1, 2, 3, &c. omnes

omnes factores $-2m-1$. $-2m-3$. $-2m-5$. &c. in
numeratore tolluntur per similes factores in denominatore. Unde
relinquitur ut in isto casu fit coefficientis termini primi

$$\frac{1}{-1. -3. -5. \dots -2m-1}, \text{ atq; fit } s = \frac{z^{-m+1}}{-1. -3. -5. \dots -2m+1} +$$

$$+ \frac{-m+1. -m}{2. -2m-1} \frac{x x}{z z} A + \frac{-m-1. -m-2}{4. -2m-3} \frac{x x}{z z} B \text{ \&c. vel}$$

$$s = \frac{x^{2m-1}}{-1. -3. -5. \dots -2m+1} + \frac{-m+1. m}{2. 2m+1} \frac{x x}{z z} A +$$

$$+ \frac{-m-1. m+2}{4. 2m+3} \frac{x x}{z z} B + \frac{-m-3. m+4}{6. 2m+5} \frac{x x}{z z} C + \text{\&c. hoc est per}$$

seriem priorem. Et hæc series quidem est præstantior ad inveniendas
fluents s, s, s , &c. altera autem ad inveniendas fluxiones s, s, s , &c.

Porrò est $r = yz$, atque $y = \frac{yz}{c}$. Unde sumendo fluentes purè
fit $r = cy$, $\dot{r} = c^2 y$, $\ddot{r} = c^3 y$, &c. item sumendo fluxiones, $r = y$,
 $\dot{r} = \frac{y}{c}$, $\ddot{r} = \frac{y}{c^2}$, &c. Unde observatis signis, per hos valores ipso-
rum s, s, s , &c. $\dot{s}, \dot{s}, \dot{s}$, &c. $\ddot{s}, \ddot{s}, \ddot{s}$, &c. $r, \dot{r}, \ddot{r}$, &c. $r, \dot{r}, \ddot{r}$, &c. fit angulus FHG

$$\left(= \frac{1}{2c + 2cd} \times rs - \dot{r}\dot{s} + \ddot{r}\ddot{s} - \text{\&c.} \right) = \frac{1}{2c + 2cd} \text{ in hanc se-}$$

riem,

$$\left[\begin{array}{l} cy \times \frac{z}{x} \\ - c^2 y \times \frac{t t}{x^3} \\ c^3 y \times \frac{3 t t z}{x^5} \\ - c^4 y \times \frac{1. 3. 5 t t z^2}{x^7} + \frac{1}{5} \frac{x^2}{z^2} A \\ \text{\&c.} \end{array} \right. G g \text{ atque}$$

atque angulus FGH $\left(\frac{1}{2c + 2cd} \times -\dot{r}s + \ddot{r}s - \dot{r}''s \&c. = P \right)$
 æqualis $\frac{1}{2c + 2cd}$ in hanc seriem

$$\left\{ \begin{array}{l} y \times x \\ \frac{y}{c} \times \frac{x^3}{1.3z} + \frac{-1}{5} \frac{x^2}{z^2} A + \frac{-3}{7} \frac{x^2}{z^2} B + \&c. \\ \frac{y}{c^2} \times \frac{x^5}{1.3.5z^2} + \frac{-3}{7} \frac{x^2}{z^2} A + \frac{-5}{9} \frac{x^2}{z^2} B + \&c. \\ \&c. = P \end{array} \right.$$

Ubi est P valor ejusdem Seriei prodiens per ipsorum z, x, y valores in puncto A.

Potest etiam alia series inveniri pro angulo FGH; nempe ita corrigendo Fluents $r, \dot{r}, \ddot{r}, \&c.$ ut omnes evanescant in puncto A, ubi est $z = a$. Ut hoc fiat pone $z = a - v$, unde fit $\dot{z} = -\dot{v}$, & fluxio anguli FHG fit $\frac{\dot{v} y z}{x}$ in $\frac{1}{2c + 2cd}$. Posito itaq; $s = \frac{z}{x}$

(ut prius) erit $\dot{r} = \dot{v} y$, existente $\dot{w} = -\dot{v}$, atq; $\dot{y} = \frac{-\dot{v} y}{c}$. Unde fit $\dot{r} = -c \dot{y}$, adeoque $r = cd - cy$, (quoniam est d valor ipsius y in puncto A,) indeque $r\dot{w} = -cd\dot{v} + cy\dot{v} = -cd\dot{v} - c^2\dot{y}$, adeoq; $\dot{r} = c^2d - cdv - c^2y$, & inde $\ddot{r} = c^3d - c^2dv + \frac{cdv^2}{2} - c^3y$, $\ddot{r} = c^4d - c^3dv + \frac{c^2dv^2}{2} - \frac{cdv^3}{2.3} - c^4y$, & sic porro.

Unde fit angulus FGH æqualis $\frac{1}{2c + 2cd}$ in

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{cd - cy} \times \frac{z}{x} \\ - \overline{c^2d + cdv + c^2y} \times \frac{tt}{x^3} \\ \overline{c^3d - c^2dv + \frac{cdv^2}{2} - c^3y} \times \frac{3ttz}{x^5} \\ - \overline{c^4d + c^3dv - \frac{c^2dv^2}{2} + \frac{cdv^3}{2.3} + c^4y} \times \frac{1.3.5ttz^2}{x^7} + \frac{1}{5} \frac{x^2}{z^2} A \\ \&c. \end{array} \right.$$

Et

Et hinc fit summa angulorum FHG, FGH, hoc est angulus GFH
 æqualis $\frac{1}{2c + 2cd}$ in

$$\left[\begin{aligned} & c d \times \frac{z}{x} \\ & - \frac{c^2 d + c d v}{x^3} \times \frac{t t}{x^3} \\ & + \frac{c^3 d - c^2 d v + \frac{c d v^2}{2}}{x^5} \times \frac{3 t t z}{x^5} \\ & - \frac{c^4 d + c^3 d v - \frac{c^2 d v^2}{2} + \frac{c d v^3}{2.6}}{x^7} \times \frac{1.3.5 t t z^2}{x^7} + \frac{1}{5} \frac{x^2}{z^2} A. \end{aligned} \right]$$

Ubi angulus SAD est satis parvus, commodè invenitur angulus GFH per hanc seriem. Sed ubi est angulus SAD nimis magnus, quærendus est angulus FGH per seriem alteram.

Potest & alia series inveniri pro angulo FGH, per Propositionem septimam. Sit enim Q fluens ipsius $\frac{-zzy}{x}$, hoc est ipsius xy .

Tum per Propositionem illam, quo tempore x fit $x \pm v$, fiet Q

$$= Q \pm \frac{\dot{Q}}{x} v + \frac{\ddot{Q}}{2x^2} v^2 \pm \frac{\ddot{\ddot{Q}}}{2.3x^3} v^3 + \&c. \text{ nempe fluente uni-}$$

formiter x . Unde si pro x sumatur ipsius valor in puncto aliquo dato I, & fit $x - v$ ejusdem valor in A, & $x + v$ ejusdem valor

in a , valor fluentis in puncto A erit $Q + \frac{\dot{Q}}{x} v + \frac{\ddot{Q}}{2x^2} v^2 + \frac{\ddot{\ddot{Q}}}{2.3x^3} v^3$

+ &c. & valor fluentis in puncto a erit $Q - \frac{\dot{Q}}{x} v + \frac{\ddot{Q}}{2x^2} v^2$

$- \frac{\ddot{\ddot{Q}}}{2.3x^3} v^3 + \&c.$ Quo valore dempto a valore altero, residuum

erit Fluentis pars adjacens rectæ A_a ; adeoq; si sit $SB = \frac{SA^2}{S_a}$, erit
 angulus

$$\text{angulus } FGH = \frac{Q}{c + cd} \times \frac{Q}{x} v * + \frac{Q}{2.3 x^3} v_3 * + \frac{Q v^5}{2.3.4.5 x^5}$$

+ &c. In hoc casu autem pro x scripto 1, est $z = \frac{x}{z}$, & $y =$

$$\frac{x y}{c z}. \text{ Unde existente } Q = y, \text{ fiunt } \ddot{Q} = \frac{y}{c z^2} \times \frac{x^2}{c} - \frac{t t}{z},$$

$$\ddot{Q} = \frac{y}{c^2 z^4} \times \frac{x^4}{c c} - \frac{6 t t x^2}{c z} + \frac{3 t t}{z} \times \frac{1}{z} - c x \frac{1 + 5 x^2}{z^2} \cdot \&c.$$

SCHOLIUM.

In hac Curva Radius Curvaturæ est $\frac{2 + 2y \times c \times SB \text{ cub.}}{y \times SQ \times SA \text{ quad.}}$; quod in puncto A est $\frac{2 + 2d \times c \times SA}{d \times SD}$; & ubi angulus SAD est rectus, est $\frac{2 + 2d}{d} c$. Quod per valores c & d (Schol. Prop. 26. & Schol. Lem. 13.) est 5 SA, circiter, existente SA Radio Terræ. Proinde curvatura Radii Luminis horizontalis, ad superficiem Terræ, est ad curvaturam Circuli maximi Terræ, ut 1 ad 5. Velocitas autem Luminis est ad velocitatem Corporis revolventis in Circulo maximo Terræ, cum vi Gravitatis, circiter ut 40000 ad 1. Unde est Aeris vis refringens ad vim Gravitatis in superficie Terræ circiter ut 320000000 ad 1. Nam in datâ inclinatione Trajectoriarum ad directionem Virium centripetarum, Vires illæ sunt in ratione compositâ Flexurarum & quadratorum Velocitatum.

F I N I S.



Corrigenda & Addenda.

PAG. 2. lin. 5. Præf. pro *ament* lege *amant*. Pag. 2. lin. 3. pro $\ddot{x}$, $\ddot{x}$, lege $\ddot{x}$, $\dot{x}$. Pag. 8. lin. 11. post $z = A$ scribe $= B \dot{x}$. Pag. 15. lin. 13. pro $\pi + \frac{v}{a}$ lege $p + \frac{v}{a}$ lin. 26. lege *vel habeat sympto-*
mata, &c. Pag. 16. lin. antepen. lege *Æquationibus ordinariis inte-*
grales, &c. Pag. 19. lin. 1. lege *eliminetur*. Pag. 20. lin. 7. lege *expressio-*
nes propositas, &c. Pag. 23. Corollarium primum sic enuntietur. *Et*
mutatis signis incrementorum, quo tempore z decrescendo fit z — v, eodem

tempore x ctiam decrescendo fiet $x - x \frac{v}{1z} + x \frac{vv}{1.2z^2} - x \frac{vvv}{1.2.3z^3}$ &c.

Pag. 26. lin. 21. lege $4v^{3\delta} y^{3\lambda} - 4v^{2\delta} y^{2\lambda} =$ &c. Pag. 28. lin. 9. post
Problematis adde *quas indicavimus Prop. 4 & 5.* lin. antepen. in fine
adde *se.* Pag. 39. lin. 7. post *aliqua* adde *quæ dicetur.* Pag. 43. lin. 16.
pro *est* lege *sit.* Pag. 45. lin. 9. pro *scribatur z* lege *scribatur x.* lin.
ult. in fin. pro $\frac{\lambda}{-5}$ lege $\frac{\lambda}{-1}$. Pag. 56. lin. penult. pro *fiat x* lege *fiat x.* Pag. 63.

lin. 3. post $-\frac{\ddot{z} \dot{v}}{z}$, adde (*per Prop. 3.*) Pag. 67. lin. penult. in princ.
 $\frac{\ddot{z} \dot{v}}{z}$

adde verba *Duc EI parallelam ipsi AD, & occurrentem CF in I, atque.*

Pag. 68. lin. 8. pro $\frac{\ddot{x}}{\ddot{v}}$ lege $\frac{\dot{x}}{\dot{v}}$, lin. 9. pro $\frac{\ddot{x} + \dot{x}}{\ddot{v} + \dot{v}}$ lege $\frac{\dot{x} + \ddot{x}}{\dot{v} + \ddot{v}}$ Pag.

78. lin. 12. 15, 23, & pag. 79. lin. 6. pro *adsit* lege *insit.* Pag. 79. lin.
15. lege *ipsius yx.* Pag. 84. lin. 2. lege *Terram concava.* Pag. 95. lin. 4.
pro $\frac{x}{\overline{CB}}$ CA lege $\frac{x}{\overline{CA}}$ CB. Pag. 97. lin. 14. post *Sed* adde (*quoniam datur*

2 CG.) Pag. 99. lin. 20. post $\frac{D}{P}$ adde $[=CG \times GA]$. Pag. 110. lin.

6. pro $\sqrt{x^2 \frac{1+d}{1+y} b^2}$ lege $\sqrt{x^2 - \frac{1+d}{1+y} b^2}$.

Corrigenda & Addenda

AG. 2. lin. 7. Post. Pro amant lege amant. Pag. 2. lin. 3. pro x, x.
 lege x. Pag. 8. lin. 11. post x = A scribo = B x. Pag. 17.
 lin. 13. pro $x + a$ lege $x + a$ lin. 26. lege vel habeat sumpto-
 mata, etc. Pag. 16. lin. antepen. lege Additionibus ordinatis inter-
 vales, etc. Pag. 19. lin. 1. lege aliamur. Pag. 20. lin. 7. lege expressio-
 nes propositas, etc. Pag. 23. Corollarium primum sic enunciatur. Si
 amantur signis incrementorum, quo tempore x descendendo sit x - v, eodem
 tempore x aliam descendendo sit x - $\frac{v}{1.2}$ + $\frac{v^2}{1.2.3}$ - $\frac{v^3}{1.2.3.4}$ + $\frac{v^4}{1.2.3.4.5}$ - etc.
 Pag. 26. lin. 21. lege $ay - ay^2 = 4y - 4y^2$ = etc. Pag. 28. lin. 9. post
 Problematibus addo quae inveniuntur Prop. 4. & 5. lin. antepen. in fine
 addo se. Pag. 39. lin. 7. post aliqua addo quae sunt. Pag. 43. lin. 16.
 pro est lege sit. Pag. 47. lin. 9. pro scribam x lege scribam x. lin.
 ult. in fine pro x lege x. Pag. 56. lin. penult. pro sit x lege sit x. Pag. 63.
 lin. 3. post $x - \frac{v}{1.2}$ addo (per Prop. 3.) Pag. 67. lin. penult. in princ.
 addo verba Dne EI parallela sunt istis AD. Et occurruntur CF in I utque.
 Pag. 68. lin. 8. pro $\frac{x}{v}$ lege $\frac{x}{v}$ lin. 9. pro $x + \frac{v}{1.2}$ lege $x + \frac{v}{1.2}$ Pag.
 78. lin. 12. 15. 23. & pag. 79. lin. 6. pro velle lege velle. Pag. 79. lin.
 17. lege ipsum x. Pag. 84. lin. 2. lege Tertium concurre. Pag. 97. lin. 4.
 pro x CA lege x CB. Pag. 97. lin. 14. post sed addo (quoniam datum
 CB CA
 2 CG) Pag. 99. lin. 20. post D addo [= CG x GA]. Pag. 110. lin.
 6. pro $\sqrt{x^2 + 4}$ lege $\sqrt{x^2 - \frac{1+9}{1+3}}$
 $\frac{1+3}{1+3}$

Corrigenda & Addenda

AG. 2. lin. 7. Post pro amant lege amant. Pag. 2. lin. 3. pro x, x.
 lege x. Pag. 8. lin. 11. post x = A scribe = B x. Pag. 17.
 lin. 13. pro $\frac{v}{w+x}$ lege $\frac{v}{p+x}$ lin. 26. lege vel habet sympto-
 mata. Etc. Pag. 16. lin. antepen. lege Additionibus ordinibus inter-
 gradis. Etc. Pag. 19. lin. 1. lege eliminant. Pag. 20. lin. 7. lege expressio-
 nes propositas. Etc. Pag. 23. Corollarium primum sic enuncietur. Si
 unitatis signis incrementorum, quo tempore x descendendo fit x - v, eodem
 tempore x etiam descendendo fit x - $\frac{v}{1.2.3.}$ + $\frac{v^2}{1.2.3.}$ - $\frac{v^3}{1.2.3.}$ Etc.
 Pag. 26. lin. 27. lege ad $y - 4x$ = Etc. Pag. 28. lin. 9. post
 incrementis addit quae incrementum Pag. 28. lin. antepen. in fine
 addit. Pag. 39. lin. 7. post aliam addit quae dicitur. Pag. 42. lin. 16.
 pro est lege in. Pag. 47. lin. 9. pro scribitur x lege scribitur x. lin.
 ult. in fin. pro x lege x. Pag. 56. lin. penult. pro x lege x. Pag. 63.
 lin. 3. post $x - \frac{v}{1.2.3.}$ addit (per Prop. 3.) Pag. 67. lin. penult. in princ.
 addit verba Dne Et parallelae ipsi AD. Et occurrentes CF in A addit.
 Pag. 68. lin. 8. pro $\frac{x}{v}$ lege $\frac{x}{v}$ lin. 9. pro $x + \frac{v}{1.2.3.}$ + $\frac{v^2}{1.2.3.}$ + $\frac{v^3}{1.2.3.}$ (Pag.
 78. lin. 12. 15. 23. & pag. 79. lin. 6. pro ubi lege ubi. Pag. 79. lin.
 17. lege ipsum x. Pag. 84. lin. 2. lege Tertium concurre. Pag. 97. lin. 4.
 pro x CA lege x CB. Pag. 97. lin. 14. post sed addit (quoniam datur
 $\frac{CB}{CA}$
 2 CG.) Pag. 99. lin. 20. post D addit [= CG x GA]. Pag. 110. lin.
 $\frac{1}{p}$
 6. pro $\sqrt{x^2 + 4x}$ lege $\sqrt{x^2 - \frac{1}{1+x}}$

Taylor, Brook

Methodus incrementorum directa & inversa

Londini 1717

4 Math.p. 359

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10053900-1